数字信号处理：典型信号

主讲人：杨国财

哈尔滨工业大学 机电学院机器人研究所

邮箱：gc_yang@outlook.com

目录

- 1. 几种典型信号（复指数信号，单位阶跃和单位脉冲）
- 2. 信号的性质（周期性，奇偶性，信号的能量，信号的功率）
- 3. 信号的变换（移位，展缩，反折）

几种典型信号：单位圆上的复指数信号

（1）连续时间形式（continuous-time）

数学表达式：$x(t)=e^{j(\omega t+\varphi)}$

$$x(t)=e^{j(2\pi f t+\varphi)}$$

Ωkn

Ωk

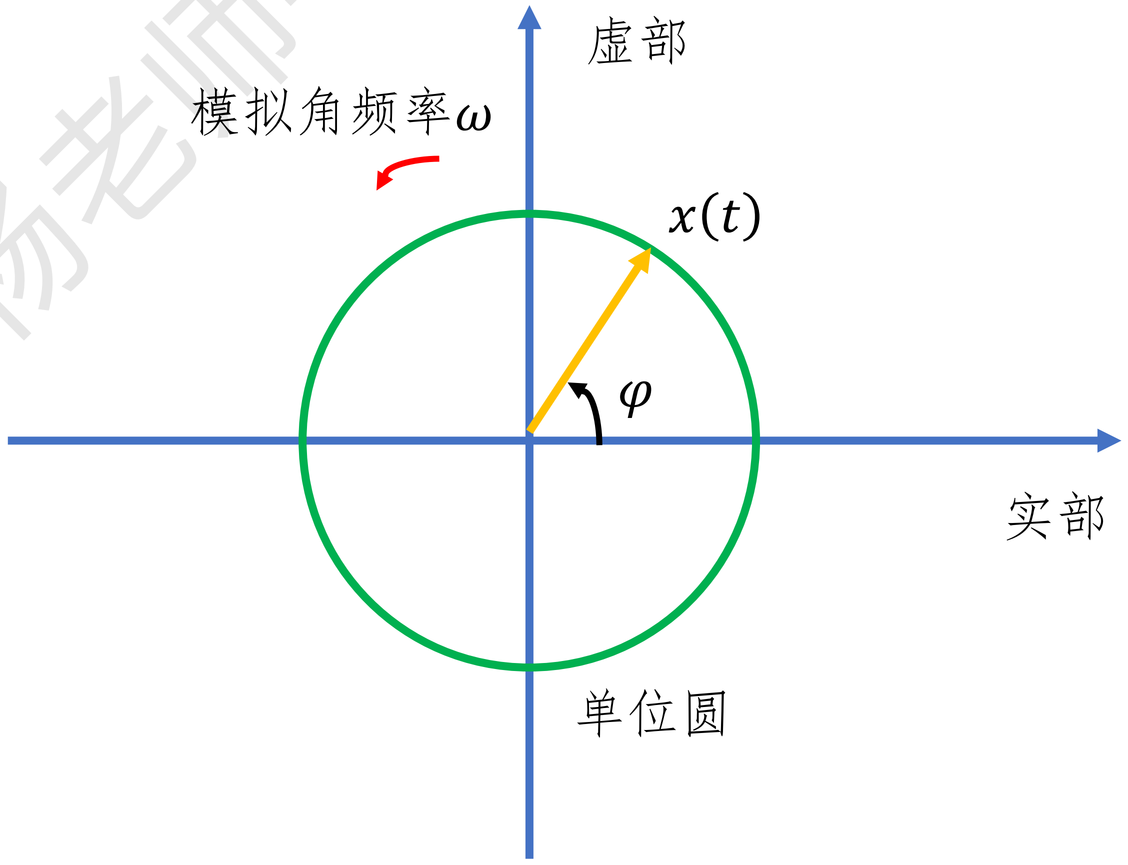
ω：**模拟角频率，单位：rad/s，**

f：**频率，单位：Hz，**

T：**周期，单位：s，**

角频率、频率和周期的关系$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$，

φ：初相位，单位：rad。

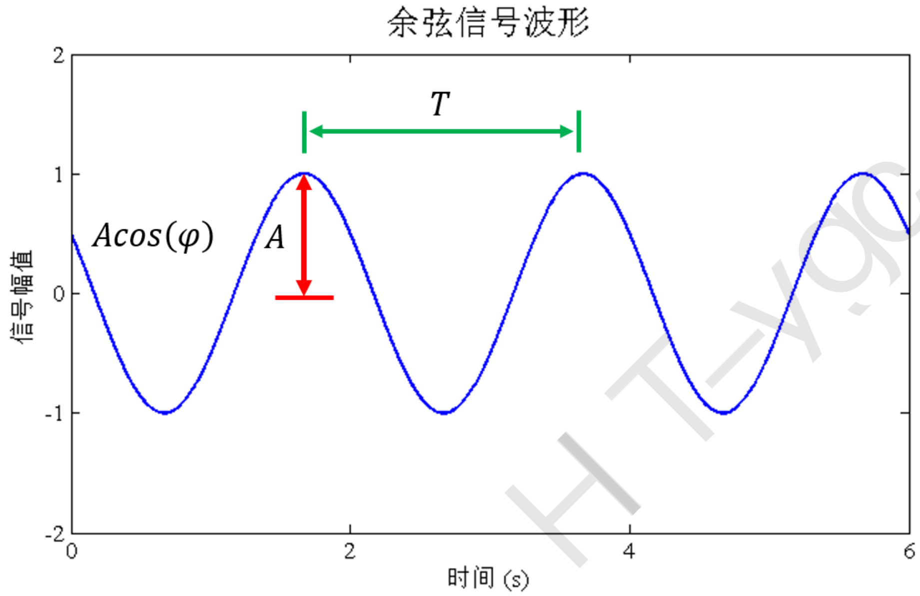


几种典型信号：单位圆上的复指数信号

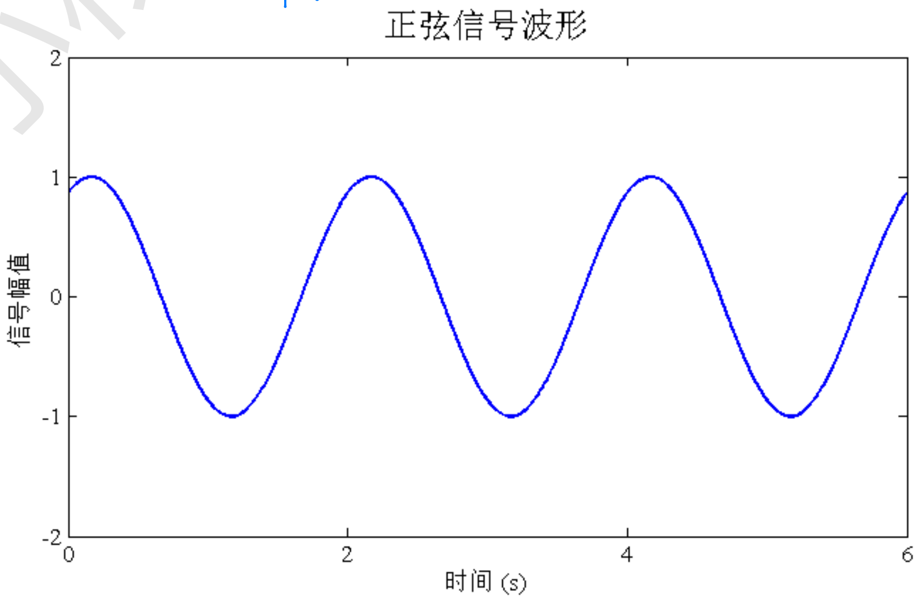
重要性质：

（1）连续时间的单位圆复指数信号一定是周期的；

幅值
初相位
周期



实部：余弦信号



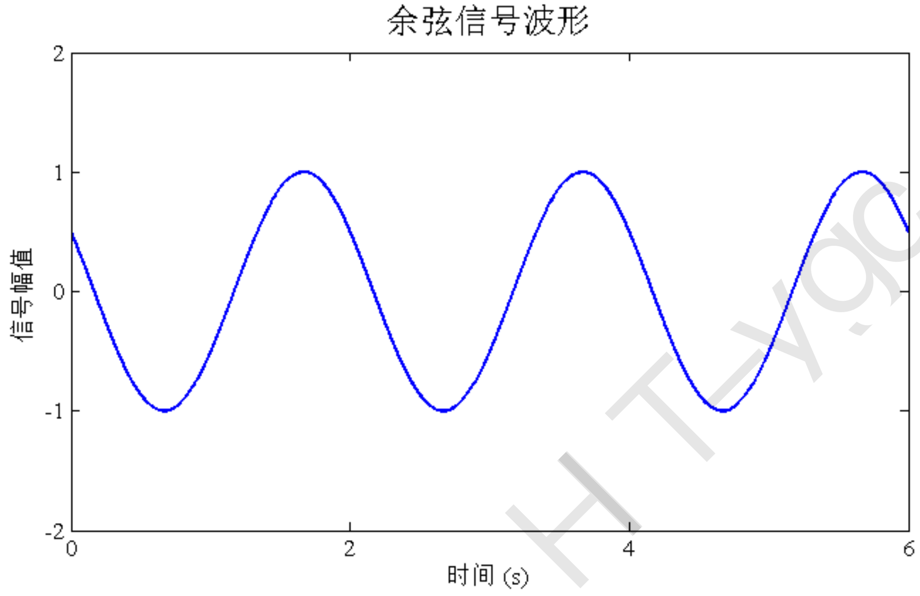
虚部：正弦信号

几种典型信号：单位圆上的复指数信号

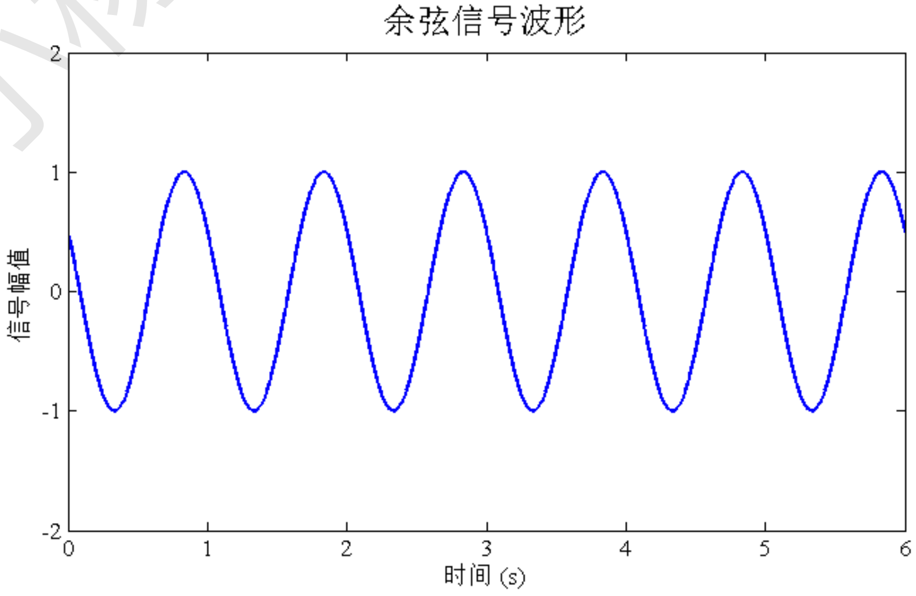
重要性质：

$\omega\uparrow$ $f\uparrow$（高频） $T\downarrow$ $\Rightarrow$ 同一时间振荡剧烈

（2）ω越大，波形振荡越剧烈； $\uparrow\omega=2\pi f$ $\because f$大 表示周期小 同一时间振荡剧烈



$\omega=\pi$的实部波形



$\omega=2\pi$的实部波形

几种典型信号：单位圆上的复指数信号

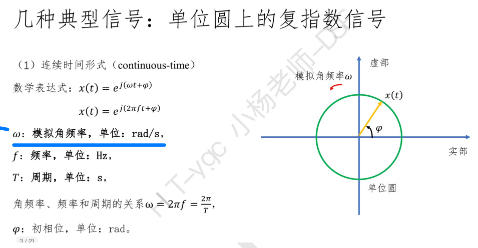
（2）离散时间形式（discrete-time）

对比连续时间

单位圆上的旋转矢量

数学表达式：$x[n] = e^{j(\Omega n+\Psi)}$

Ω：数字角频率，单位：rad，



$$x(t) \xrightarrow{t=nT_s} e^{j(\omega n T_s+\varphi)} \xrightarrow{T_s={}^{1}/_{f_s}} e^{j\left(\left({}^{\omega}/_{f_s}\right)n+\varphi\right)}$$

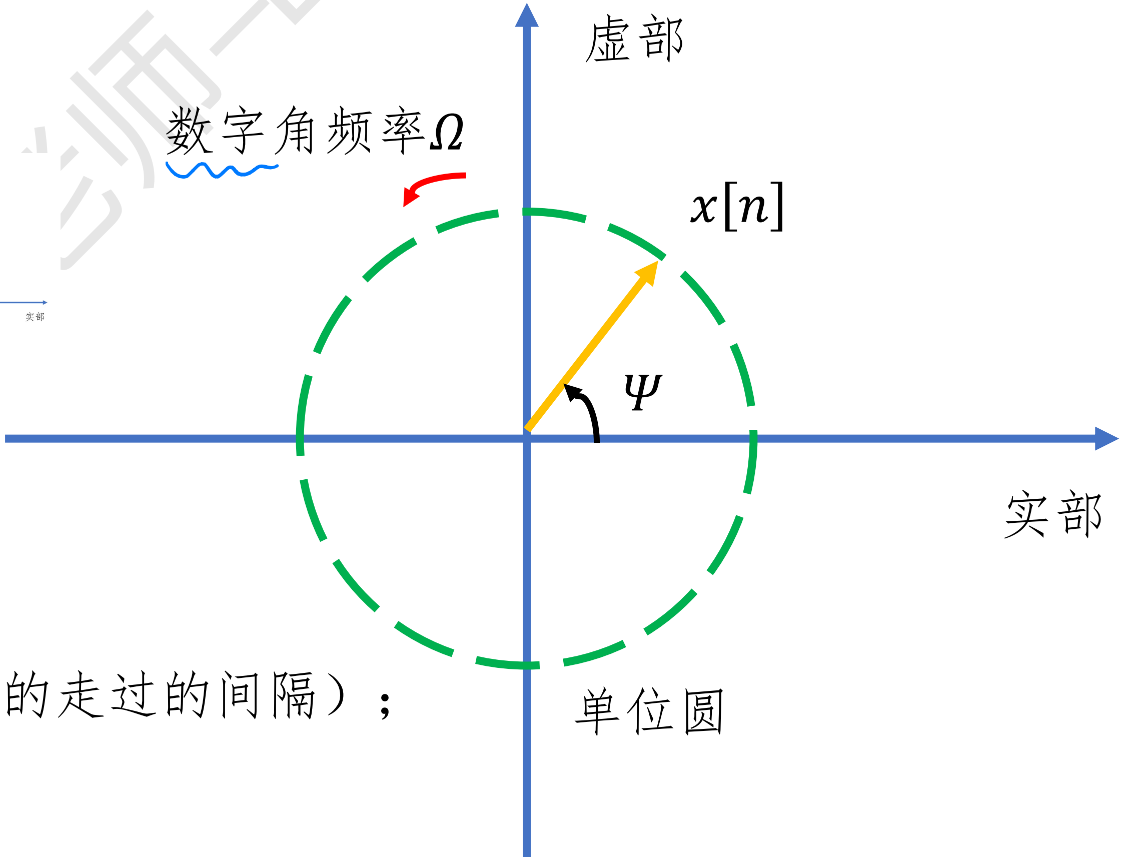
$\Omega = {}^{\omega}/_{f_s} = {}^{2\pi\omega}/_{\omega_s}$，

将模拟角频率与采样角频率归一化得到数字角频率（每一拍的走过的间隔）；

Ψ：初相位，单位：rad。

问题1：离散之后还一定是周期信号吗？

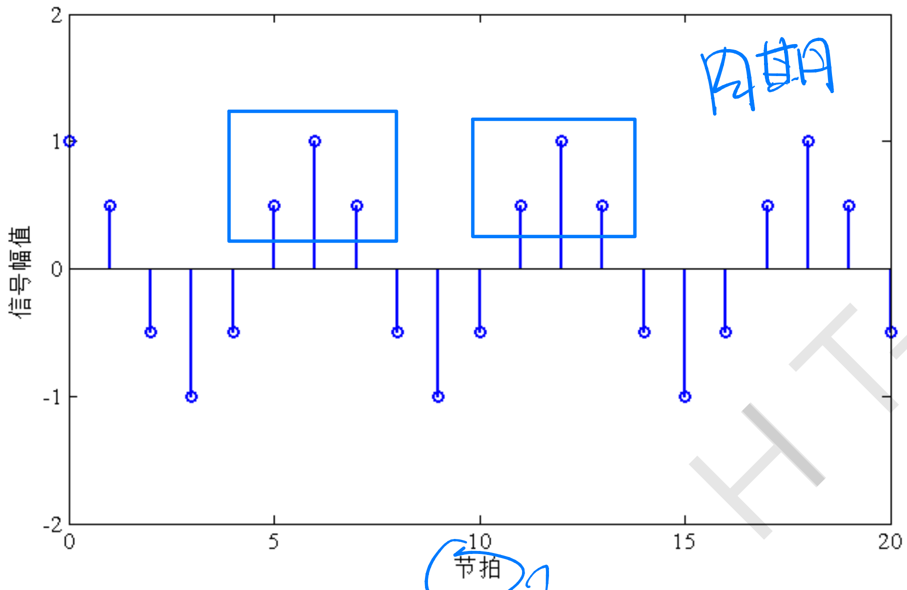
问题2：Ω越大振荡越剧烈吗？



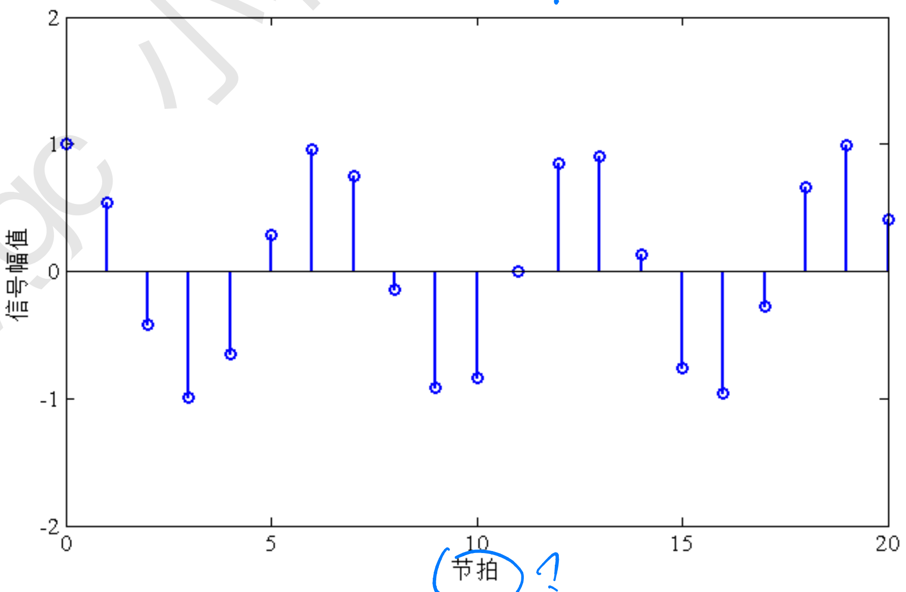
几种典型信号：单位圆上的复指数信号

问题1：离散之后还一定是周期的吗？

答：并不是，$\frac{2\pi}{\Omega}$为有理数，离散时间信号才是周期的。 $\frac{2\pi}{1}=2\pi$ why?



$\Omega=\pi/3$的实部波形



$\Omega=1$的实部波形

几种典型信号：单位圆上的复指数信号

问题2：Ω越大振荡越剧烈吗？

连续 & 离散？

答：不是，$e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j2\pi n}e^{j\Omega n} = e^{j\Omega n}$，即：$\Omega$和$(\Omega+2\pi)$的振荡情况是一样的。

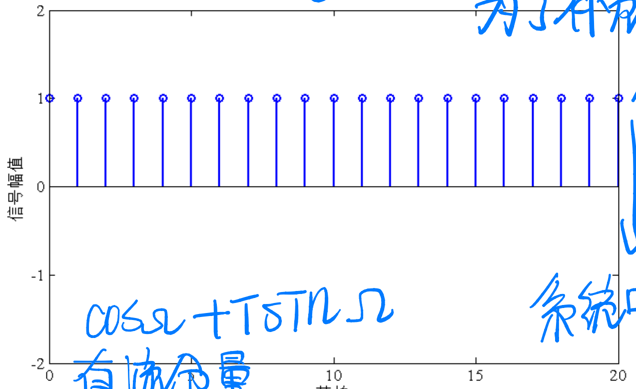
特别地，对于归一化的序列节拍$n=0,1,2,\ldots$，Ω在0和2π附近对应着低频的旋转矢量$e^{j\Omega n}$（离散形式的正交基函数），Ω在π附近对应着高频的旋转矢量（$\Omega = {}^{2\pi\omega}/_{\omega_s}$，即：${}^{\omega}/_{\omega_s} = {}^{1}/_{2}$时是原始信号所夹杂的最高频率分量，与采样定理呼应）。

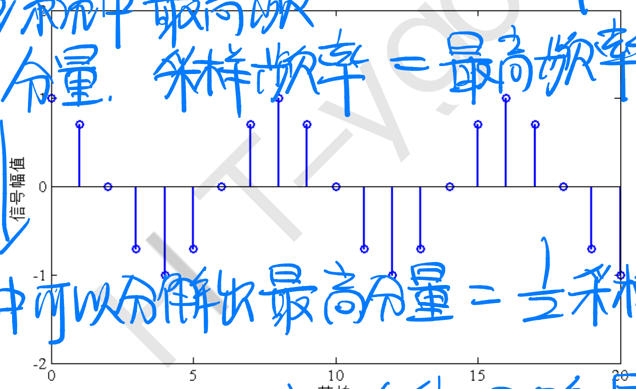
采样角频率

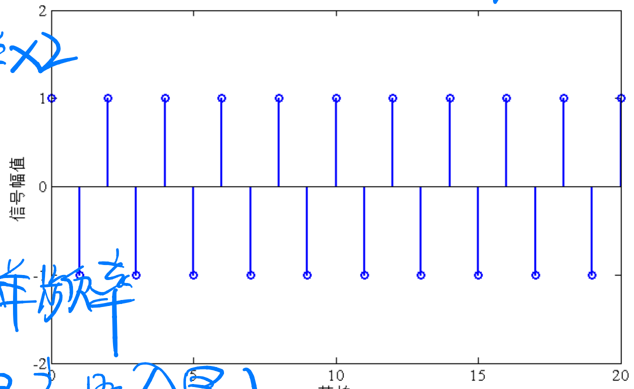
模拟角频率

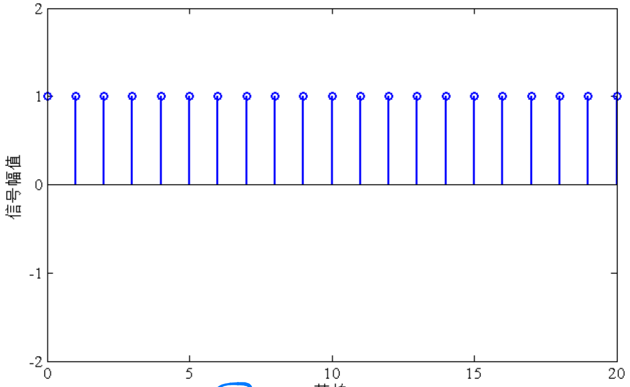
Ωkn　　$\Omega = \frac{2\pi}{N}$

为了补充系统中最高频分量　采样频率 = 最高频率×2









$\cos\Omega + j\sin\Omega$

直流分量

余弦信号

系统中可以分解出最高分量 = $\frac{1}{2}$采样频率

∴ $\Omega = \pi$ 时 对应（系统可分解最高频分量）

直流分量

$\Omega = 0$的实部波形（无振荡）　$\Omega = {}^{\pi}/_{4}$的实部波形（振荡）　$\Omega = \pi$的实部波形（反复横跳）　$\Omega = 2\pi$的实部波形（无振荡）

几种典型信号：一般的复指数信号

（1）连续时间形式（continuous-time）

$e^{(r+j\omega)t}$其实就是Laplace算子e^{st}。联想：自控原理中解释 s 的实部小于0，系统稳定；大于0，系统发散。

复指数信号：$x(t)=Ce^{at}$，其中，C和a均为复数。

将C写成模长-辐角形式，有：$C=|A|e^{j\varphi}$；将a写成实部-虚部形式，有：$a=r+j\omega$

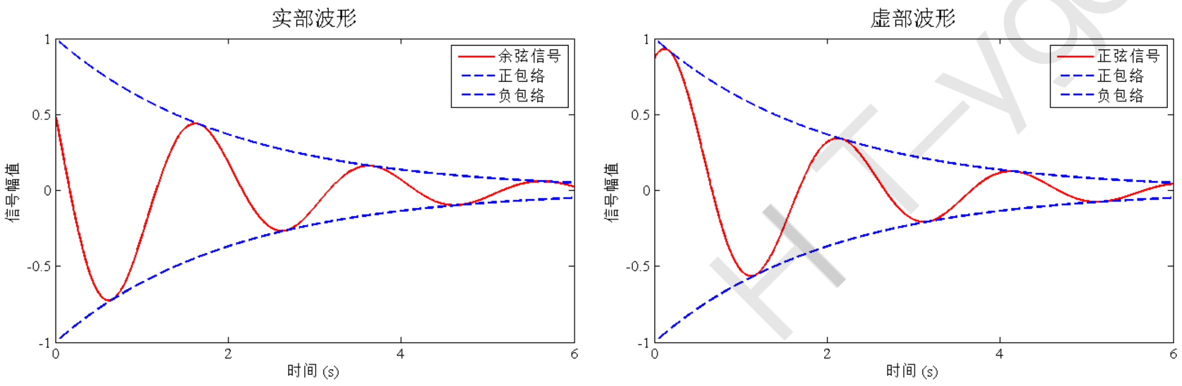
单位圆上的复指数（旋转矢量）

代入，得：$x(t)=|A|e^{j\varphi}e^{(r+j\omega)t}=|A|e^{rt}e^{j(\omega t+\varphi)}=|A|e^{rt}cos(\omega t+\varphi)+j|A|e^{rt}sin(\omega t+\varphi)$

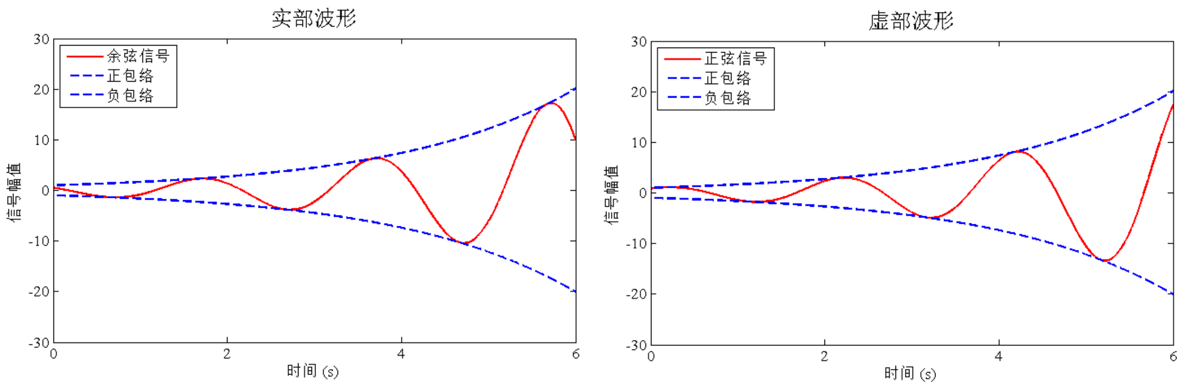
实部 $r>0$ 递增

$r<0$ 递减

$|A|e^{rt}$：单调的包络线；$e^{j(\omega t+\varphi)}$：振荡部分



$r<0$ 收敛（阻尼振荡）



$r>0$ 发散

几种典型信号：一般的复指数信号

?

$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi kn}$ $x(n)$?

（2）离散时间形式（discrete-time）

a^n其实就是Z变换算子z^n。联想：自控原理中解释z模长小于1，系统稳定；大于1，系统发散。

n: 时间变量，节拍变量

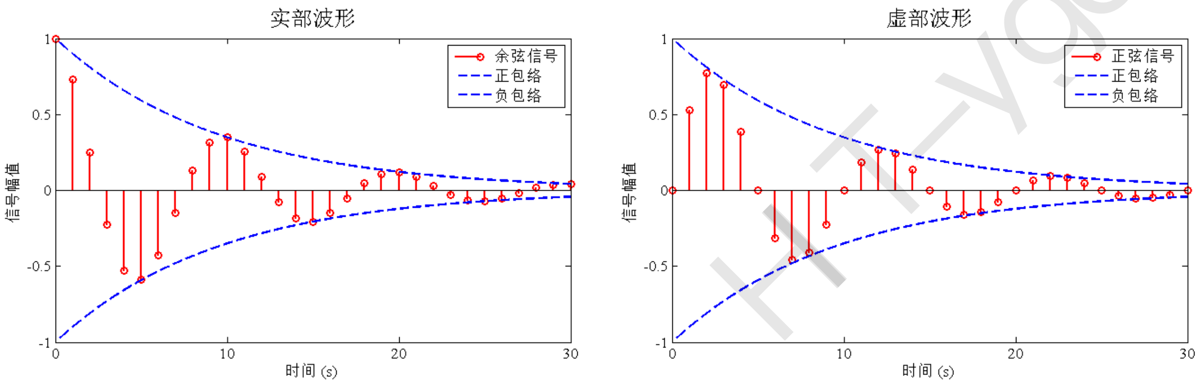
复指数信号：$x[n]=Ca^n$，其中，C和a均为复数。

将C写成模长-辐角形式，有：$C=|A|e^{j\Psi}$；将a同样写成模长-辐角形式，有：$a=|\alpha|e^{j\Omega}$

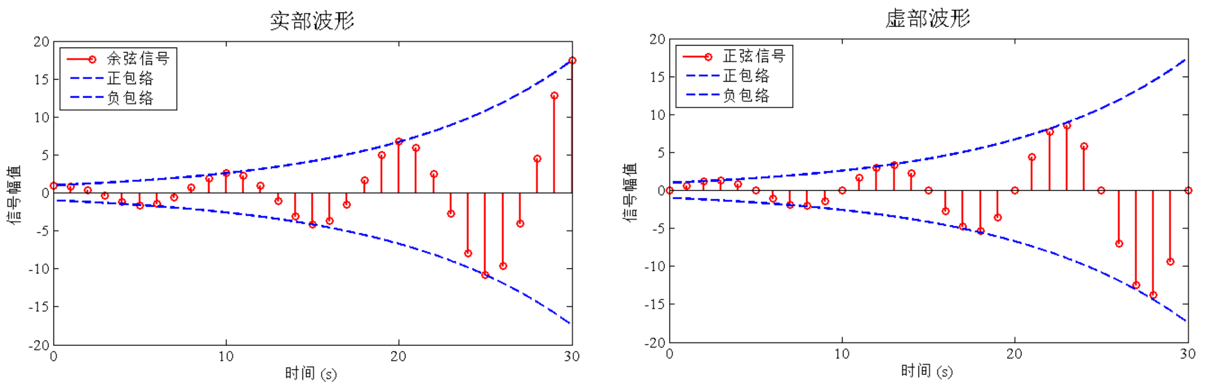
代入，得：$x[n]=|A|e^{j\Psi}|\alpha|^n e^{j\Omega n}=\underbrace{|A||\alpha|^n}_{\text{实部}}\underbrace{e^{j(\Omega n+\Psi)}}_{\text{虚部}}=|A||\alpha|^n cos(\Omega n+\Psi)+j|A||\alpha|^n sin(\Omega n+\Psi)$

$|A||\alpha|^n$：单调的包络线；$e^{j(\Omega n+\Psi)}$：振荡部分

不懂，感觉也用不到



$|\alpha|<1$ 收敛



$|\alpha|>1$ 发散

几种典型信号：单位阶跃和单位脉冲信号

（1）离散时间形式（discrete-time）

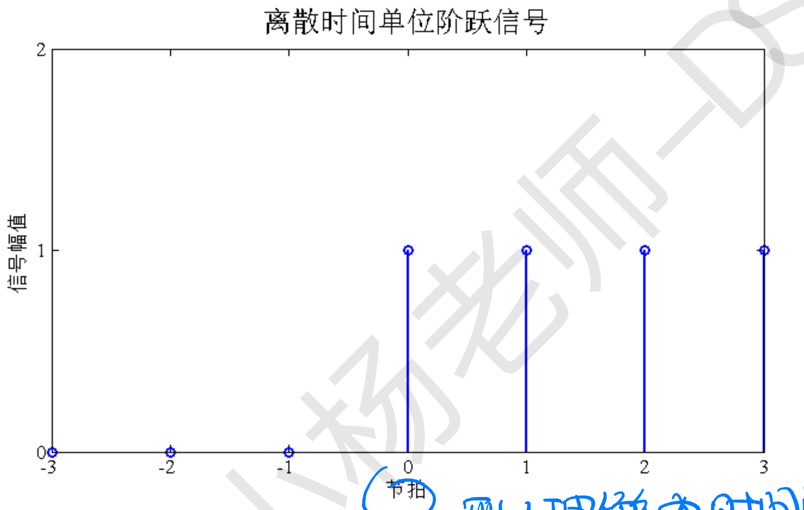
单位阶跃信号：$u[n]=\begin{cases}1, n\geq 0\\ 0, n<0\end{cases}$

单位脉冲信号：$\delta[n]=\begin{cases}1, n=0\\ 0, n\neq 0\end{cases}$

二者的关系：

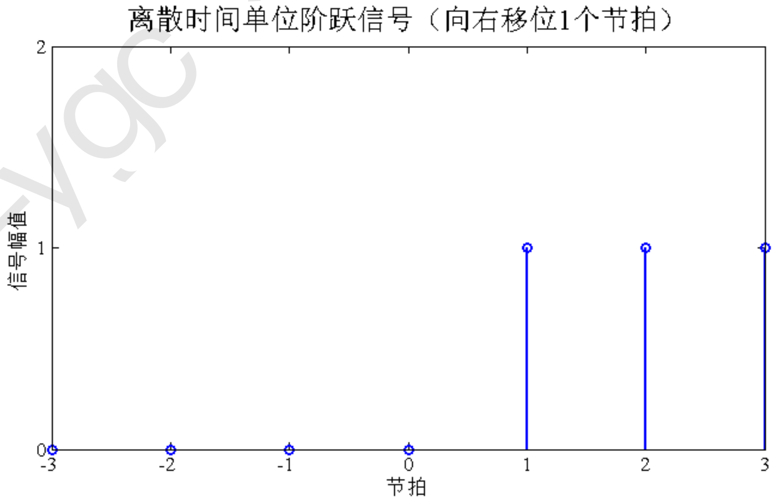
$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$（一次差分）

$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$（动态求和）

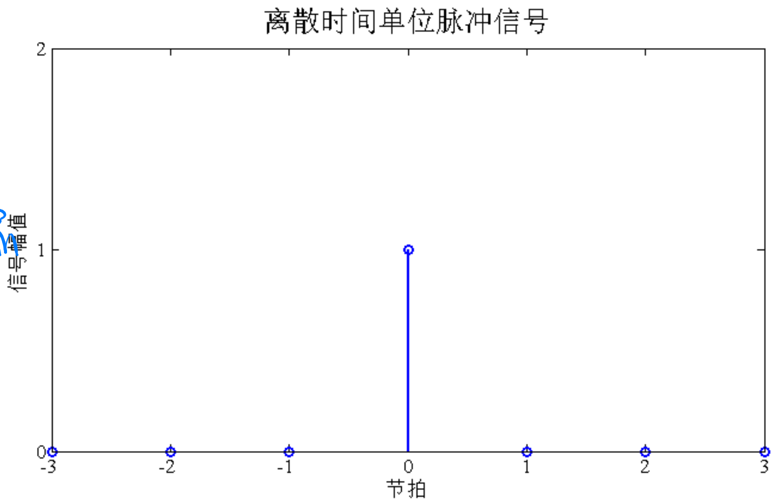


$u[n]$

可以理解为时间点



$u[n-1]$



$\delta[n]$

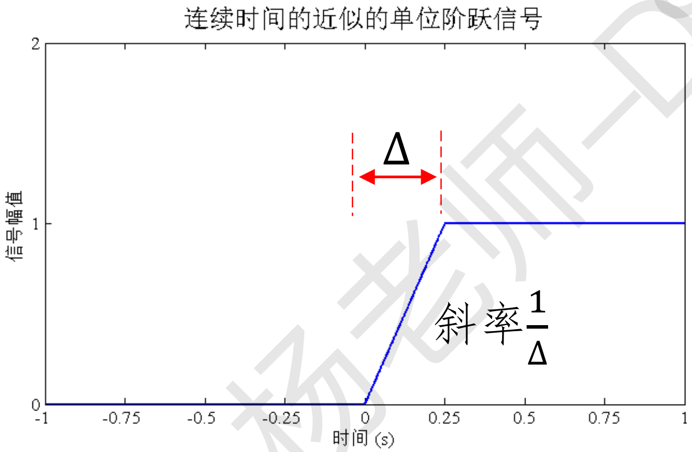
几种典型信号：单位阶跃和单位脉冲信号

（2）连续时间形式（continuous-time）

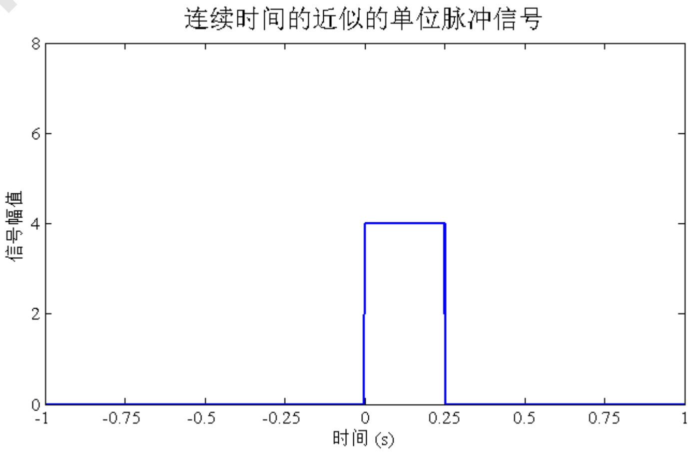
单位阶跃信号：$u(t)=\begin{cases}1, t>0\\0, t<0\end{cases}$

单位脉冲信号：$\begin{cases}\delta(t)=0, t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\end{cases}$

单位脉冲信号为**奇异函数**，是Dirac提出的对强度极大，作用时间极短的物理量的理想化模型。

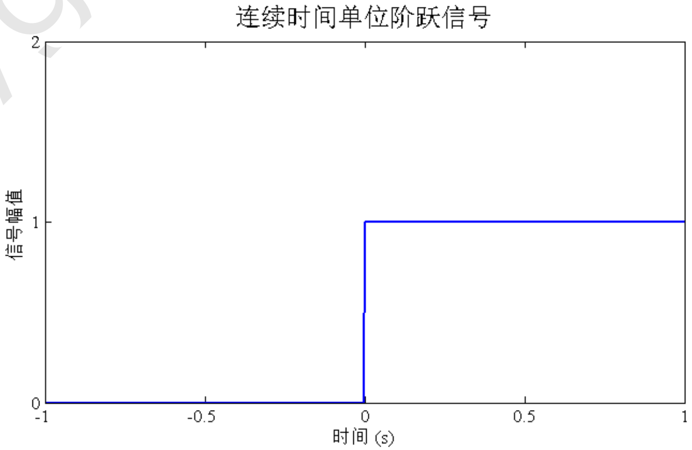


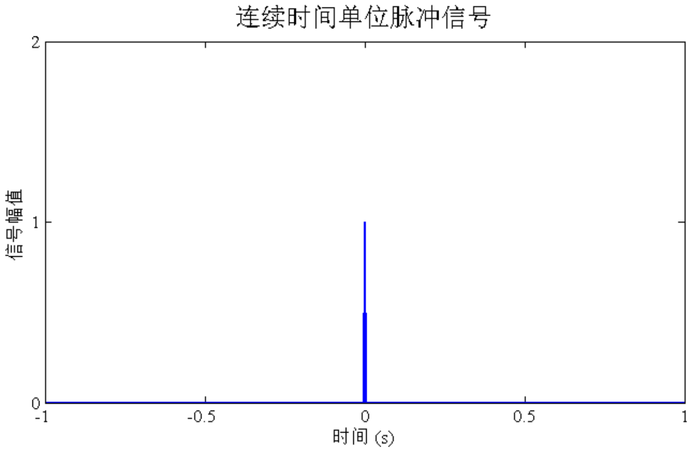
$u_\Delta(t)$



$$\delta_\Delta(t)=\frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

当Δ→ 0，上述两个信号变为单位阶跃和单位脉冲信号





几种典型信号：单位阶跃和单位脉冲信号

（2）连续时间形式（continuous-time）

类比离散时间形式的单位脉冲与单位阶跃的关系，有：

$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$（一次差分），$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$（动态求和）

$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$（微分），$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$（积分）

问题：为什么学习单位脉冲信号，或者说单位脉冲信号为什么可以称之为典型信号?

原因1：单位脉冲信号是信号在时域上分解及合成的基本信号（最朴素的一种信号分解和合成方式）。

原因2：系统对单位脉冲信号的响应反映了系统的本身特性。

单位脉冲信号的这两个特点将在下一讲《卷积和系统响应》重点讲解。

信号的性质：周期性

周期信号（periodic signals）：

（连续时间信号）存在一个正值T，有：$x(t) = x(t+T)$

（离散时间信号）存在一个正整数N，有：$x[n] = x[n+N]$

周期信号的周期并非唯一（ T 和N 的整数倍均是周期），使其成立的最小正值（连续时间）或正整数（离散时间）称之为基波周期（fundamental period）。

注意！！！：连续时间上存在周期性的信号，在采样离散化后，得到的离散时间信号并不一定仍具有周期性。

信号的性质：奇偶性

偶信号：若一个信号$x(t)$或$x[n]$，其图像绕着纵轴$t = 0$或$n = 0$反转后不变，则为偶信号。

$$x(-t) = x(t), \quad x[-n] = x[n]$$

奇信号：若一个信号$x(t)$或$x[n]$，其图像绕着原点反转后不变，则为奇信号。

$$x(-t) = -x(t), \quad x[-n] = -x[n]$$

特别地，任意一个信号都可以分解成一个偶信号（红色虚线框）和奇信号（蓝色虚线框）之和的形式。

$$x(t) = \boxed{\frac{x(t) + x(-t)}{2}} + \boxed{\frac{x(t) - x(-t)}{2}}$$

$$x[n] = \boxed{\frac{x[n] + x[-n]}{2}} + \boxed{\frac{x[n] - x[-n]}{2}}$$

信号的性质：信号的能量和功率

在区间$[T_0, T_1]$或$[N_0, N_1]$内，信号的能量定义为：

$$E=\int_{T_0}^{T_1}|x(t)|^2dt,\quad E=\sum_{n=N_0}^{N_1}|x[n]|^2$$

在区间$[T_0, T_1]$或$[N_0, N_1]$内，信号的功率定义为：

连续 离散 $|信号幅值|^2$ $|模长|^2$

$$P=\frac{1}{T_1-T_0}\int_{T_0}^{T_1}|x(t)|^2dt,\quad P=\frac{1}{N_1-N_0}\sum_{n=N_0}^{N_1}|x[n]|^2$$

能量和功率是信号的一个重要定量指标，类似描述一个篮球运动员，可以从身高、体重、臂展、体脂率以及百米跑这些基本数据评价其身体素质。信号也可以用一些定量的指标描述，如：能量，功率，周期信号的幅度谱和相位谱，非周期信号的频谱密度。

用法：1. 用于稳定性证明（判据：对于能量有限的信号激励，系统的响应的能量是否有界？）

2. 比较两个信号$f_1(t)$，$f_2(t)$对系统的效果是否一致，可以通过构造误差信号$e(t)=f_1(t)-f_2(t)$，判断误差信号的能量$\int|e(t)|^2dt$是否趋于0实现。

信号的变换

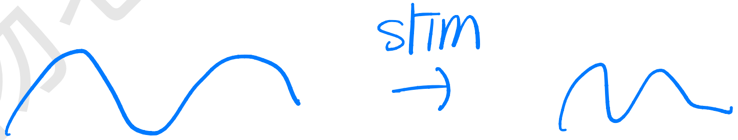
以连续时间信号为例：

➢ 信号的移位

$x(t+t_0)$表示原信号$x(t)$向左移动了t_0（时间超前了t_0），若$t_0<0$，则表示原信号向右移动了$|t_0|$（时间滞后了$|t_0|$）

➢ 信号的展缩

|a|>1 压缩 变瘦



$x(|\mathrm{a}|t)$表示原信号$x(t)$压缩（$|\mathrm{a}|>1$）或展开（$|\mathrm{a}|<1$）为原先的$\frac{1}{|\mathrm{a}|}$。

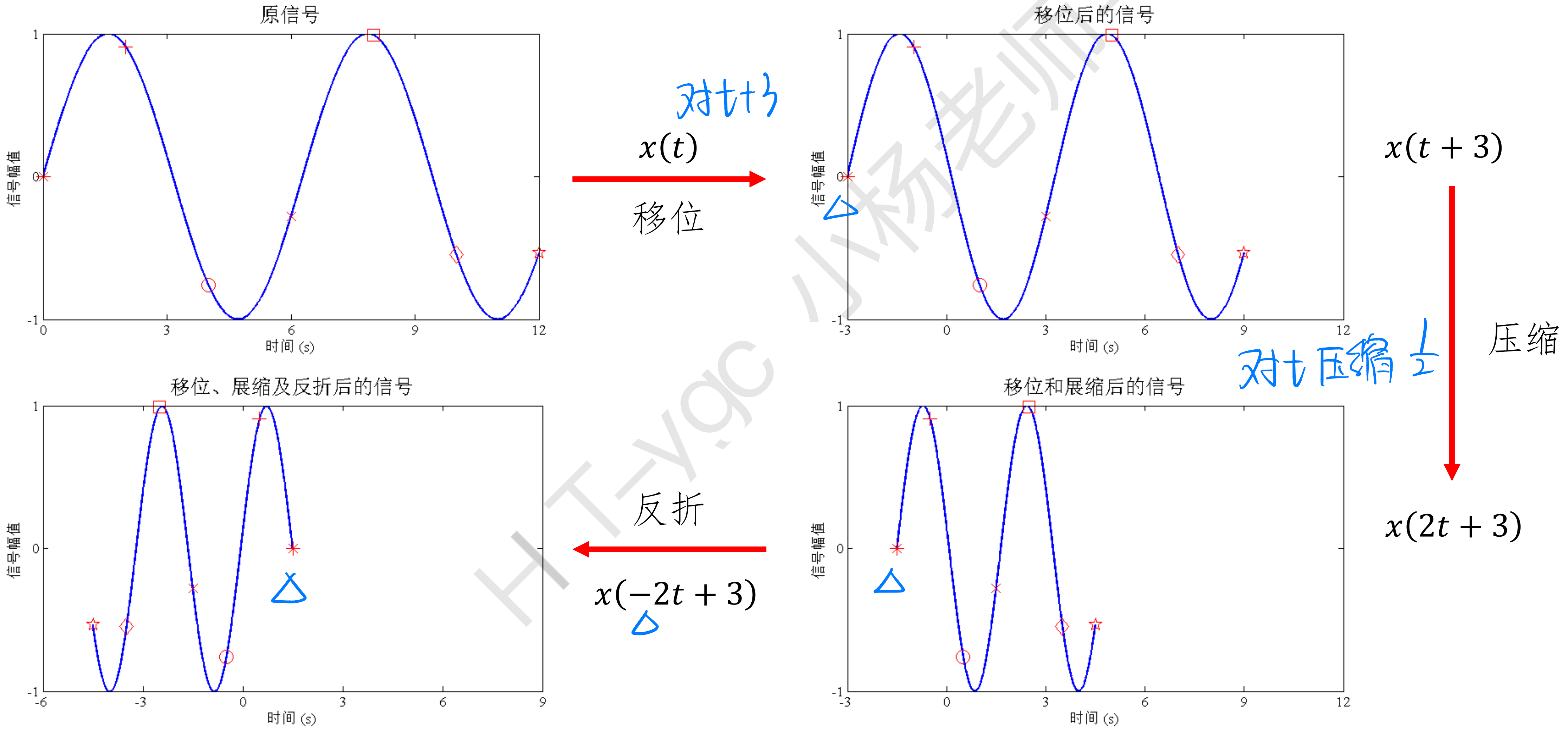
➢ 信号的反折

$x(-t)$表示原信号$x(t)$绕着纵轴$t=0$翻转。

三种变换可以组合操作，推荐的操作顺序为：平移->展缩->反折。注意！！！直接对t做变换。

信号的变换

连续时间信号的变换实例：原信号$x(t) = sin(t)$，求解变换后的信号$x(-2t + 3)$



信号的变换

如何更简单地理解这种信号的变换？

对于$x(t) = sin(t)$，若要得到$sin(0)$，原信号$x(t)$需要$t = 0$，而对于$x(t + 3)$，需要 $t = -3$，因此$x(t + 3)$的图像是左移3个单位，时间超前了3个单位时间。同理，若要得到$sin(2)$，原信号$x(t)$需要$t = 2$，而对于$x(2t)$，需要 $t = 1$，因此$x(2t)$的图像是压缩为原来的$\frac{1}{2}$。

另外，牢记所有变换是针对t，并非针对括号里的所有元素。

为什么推荐顺序是“移位-压缩-反折”？

以该例题为例，若先压缩和移位，原信号变为$x(-2t)$，该信号需要向右移动$\frac{3}{2}$个单位，才能得到目标信号

$$x\left(-2\left(t - \frac{3}{2}\right)\right) = x(-2t + 3)$$

信号的变换

离散时间信号$x[n]$的移位和反折变换同连续时间信号$x(t)$，但离散时间信号没有展缩变换的说法，因为整数节拍展缩后，并不是所有节拍都仍有意义，如：离散时间信号压缩2倍，那么原来的第3拍信号压缩后就无法表示，1.5拍并无意义。

但类似展缩，离散时间信号有插值和抽取两种运算，这两个运算在后续的信号调制章节会重点讲授。

从第3拍 变成第1.5拍 但是1.5拍是啥呢?

谢谢大家，欢迎大家评论区多提意见，交流探讨！