数字信号处理：

连续时间周期信号的傅里叶级数

主讲人：杨国财

哈尔滨工业大学 机电学院机器人研究所

邮箱：gc_yang@outlook.com

目录

- 1. 信号的合成与分解 & 系统响应
- 2. 线性时不变系统对复指数信号的响应
- 3. 连续时间周期信号的傅里叶级数

信号的合成与分解 & 系统响应

知识回顾：

由:(1)信号可以表示为一系列移位的单位脉冲信号的线性组合；

(2)系统对单位脉冲响应反映了系统本身的特性。

可推得：对于线性时不变系统，系统对任意输入信号的响应是**以输入信号形式对系统的单位脉冲响应进行线性组合**，其响应可用卷积运算来表示。

连续时间形式（卷积积分）：$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

离散时间形式（卷积和）：$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

思考：前面讲解周期信号可以表示为单位圆上复指数信号$e^{jk\omega t}$的线性组合，那么以$e^{jk\omega t}$作为系统的输入，系统的响应会是什么？

线性时不变系统对复指数信号的响应

LTI系统的重要特性！！！

线性时不变系统对$e^{(\sigma+j\omega)t}$或$\left[|A|e^{j\omega}\right]^n$的响应仍是一个复指数信号，不影响原信号的频率$\omega$，只是改变了原信号的幅值和相位。

$e^{(\sigma+j\omega)t}$可以写成e^{st}的形式，s是以实部+虚部表示形式的复数$\sigma+j\omega$；$\left[|A|e^{j\omega}\right]^n$可以写成$z^n$的形式，$z$是以模长-辐角表示形式的复数$\left[|A|e^{j\omega}\right]^n$。

e^{st} -> 连续时间LTI系统 -> $H(s)e^{st}$ （Laplace变换）

z^n -> 离散时间LTI系统 -> $H[z]z^n$ （Z变换）

在线性代数中，对于$AX=\lambda X$，称：X为矩阵A的特征向量，λ为特征值。

信号e^{st}和z^n称之为LTI系统的特征函数（eigenfunction），系统单位脉冲响应的Laplace变换$H(s)$或者Z变换$H[z]$称之为该函数的特征值（eigenvalue）。

证明：按照系统响应的定义，系统对e^{st}的响应为系统单位脉冲函数$h(t)$与e^{st}的卷积，因此，有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}d\tau}$$

该式子就是Laplace变换的定义，记作：$H(s)$，这个值取决于s；对给定的s，结果是一个**复常数**，而复数的作用：改变幅值，改变相位。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}}$$

该式子就是Z变换的定义，记作：$H[z]$，这个值取决于z；对给定的z，结果同样是一个复常数，作用同样是：改变幅值，改变相位。

线性时不变系统对复指数信号的响应

输入信号可以表示成一系列复指数信号$\{e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, e^{s_3 t}, \ldots\}$线性组合的形式，即：

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t} + \ldots$$

根据线性时不变系统的线性性质，有：

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t} + \ldots$$

同理，对于离散时间形式，输入信号可以表示成一系列复指数信号$\{z_1{}^n, z_2{}^n, z_3{}^n, \ldots\}$线性组合的形式，即：

$$x(t) = a_1 z_1{}^n + a_2 z_2{}^n + a_3 z_3{}^n + \ldots$$

根据线性时不变系统的线性性质，有：

$$y[n] = a_1 H[z_1] z_1{}^n + a_2 H[z_2] z_2{}^n + a_3 H[z_3] z_3{}^n + \ldots$$

（1）LTI系统的响应仍是同样一组复指数信号的线性组合，只是对信号的幅值和相位进行了调整。

（2）通过Laplace变换或Z变换，将系统响应的卷积运算转成了简单的乘法运算。

（3）系统的单位脉冲响应也可以表示成复指数信号的线性组合，若复指数信号的实部小于0，系统稳定。

问题：是否所有信号都可以表示成复指数信号线性组合的形式？

线性时不变系统对复指数信号的响应

答案是肯定的。

甚至对于绝大部分信号，可以由$\{e^{j\omega t}\}$或$\{e^{j\omega n}\}$线性组合得到。

若是基于单位圆上的复指数信号的信号分解以及系统分析，就是傅里叶分析；

对于无法由单位圆上的复指数信号合成，则由Laplace变换和Z变换解决，即：由$\{e^{s_k t}\}$或$\{z_k{}^n\}$线性组合得到。

傅里叶分析：研究基于$\{e^{j\omega t}\}$或$\{e^{j\omega n}\}$的信号的合成与分解，以及LTI系统对$\{e^{jk\omega t}\}$或$\{e^{jk\omega n}\}$的响应。

连续时间周期信号： 傅里叶级数（Fourier series，FS）

连续时间非周期信号：傅里叶变换（Fourier transform，FT）

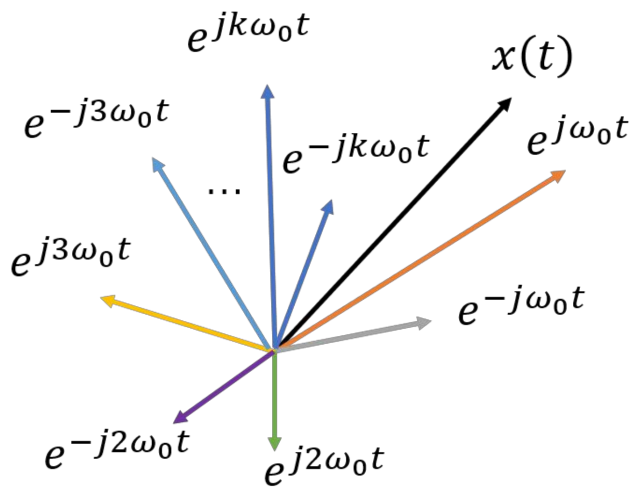
离散时间周期信号： 离散时间傅里叶级数（Discrete-time Fourier series，DTFS） DFS

离散时间非周期信号：离散时间傅里叶变换（Discrete-time Fourier transform，DTFT） DFT

数字计算机处理手段：**离散傅里叶变换**（Discrete Fourier transform，DFT） -> **快速傅里叶变换**（Fast Fourier transform，FFT）

连续时间周期信号的傅里叶级数

定义：对于周期信号$x(t)$，其周期为T_0（模拟频率为$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$），若满足狄里赫利(Dirichlet conditions)条件，则**周期信号可表示为一系列成谐波关系(harmonically related)的复指数信号的线性组合**：



FS

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k\omega_0)\,e^{jk\omega_0t}$$

复数内积 = 复数·共轭复数

$k\Omega t$

$k\Omega n$

其中，$F(k\omega_0)=\frac{\langle x(t),e^{jk\omega_0t}\rangle}{\langle e^{jk\omega_0t},e^{jk\omega_0t}\rangle}=\frac{\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0t}dt}{\int_{-T/2}^{T/2}e^{jk\omega t}e^{-jk\omega_0t}dt}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0t}dt$

$=T$

物理含义：**周期信号可以投影到复指数正交基上，其系数是信号在对应频率的基上的坐标，代表该频率的分量的强度。**

说明：ω_0称之为基波频率，$F(0\omega_0)e^{j0\omega_0t}$（$k=0$）为直流分量，$F(1\omega_0)e^{j\omega_0t}$和$F(-\omega_0)e^{-j\omega_0t}$为一次谐波分量，相应地，$F(k\omega_0)e^{jk\omega_0t}$和$F(-k\omega_0)e^{-jk\omega_0t}$为$k$次谐波分量。

$$\begin{bmatrix}X[0]\\X[1]\\X[2]\\X[3]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&W&W^2&W^3\\1&W^2&W^4&W^6\\1&W^3&W^6&W^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}$$

0f基波分量

问题：狄里赫利条件是什么？或者问，什么样的周期信号，存在上述傅里叶级数分解。

连续时间周期信号的傅里叶级数

$X[0] = x(0)+x(1)+x(2)+x(3)$

$X[1] = x(0)+x(1)W+x(2)W^2+x(3)W^3$

$X[2] = x(0)+x(1)W^2+x(2)W^4+x(3)W^6$

$X[3] = x(0)+x(1)W^3+x(2)W^6+x(3)W^9$

实际上，任何一个周期信号$x(t)$都可以用$F(k\omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$求解，但该积分并非一定收敛，也就是说，对于某些连续时间周期信号无法获得上述傅里叶级数。

还原为 $x(t)=X[k]e^{jk\Omega t}$

第1种条件：**周期信号$x(t)$在一个周期内的能量是有限的**，即：$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|x(t)|^2dt<\infty$

即 $x(t)=X[0]e^{j\cdot 0\Omega t}+X[1]e^{j\cdot 1\Omega t}+X[2]e^{j2\Omega t}+X[3]e^{j\cdot 3\Omega t}$

当满足这一条件时，上述分解系数$F(k\omega_0)$一定是存在的。**但这种条件无法保证原信号与傅里叶级数在每一个值上都相等，只能保证两者在能量上没有差别。**

还有 归一化 与 未归一化 不明白

模长 幅角

即：对于误差信号$e(t)=x(t)-\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k\omega_0)\,e^{jk\omega_0 t}$，上述条件只能保证$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|e(t)|^2dt=0$

DFT $X[k]=W^{kn}x(n)$

第2种条件：狄里赫利(Dirichlet conditions)条件组

条件1：在任何周期内，$x(t)$必须绝对可积，即：$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|x(t)|dt<\infty$

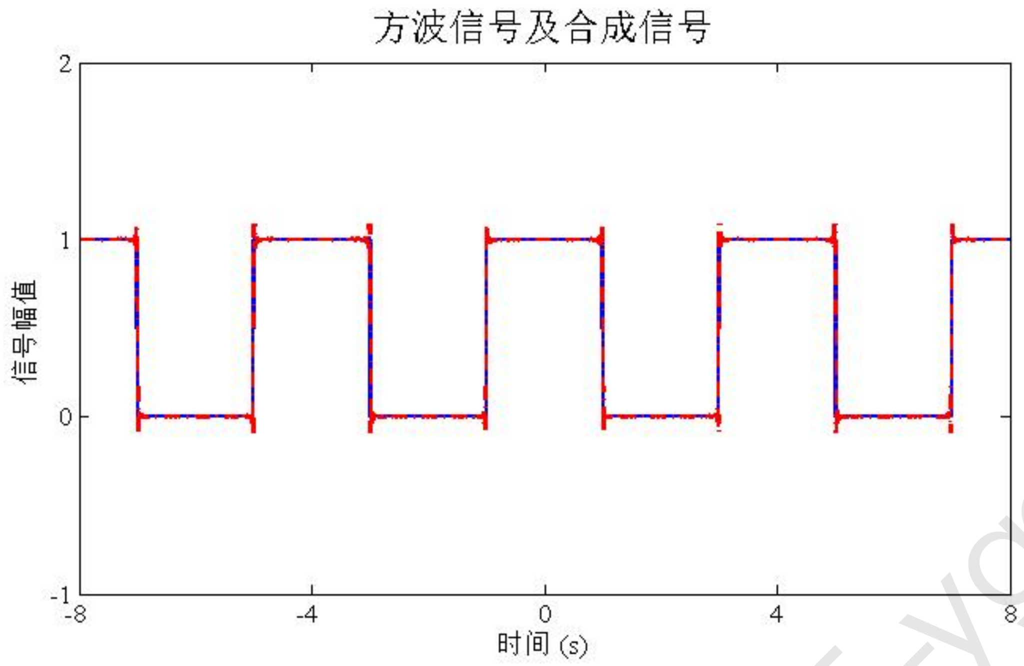
条件2：在任意有限区间内，$x(t)$的最大值和最小值数目有限

条件3：在$x(t)$的任意有限个区间内，只有有限个不连续点，而且在这些不连续点上，函数是有限值。

若满足该组条件，傅里叶级数除了在$x(t)$不连续的孤立的t值外，均可以与$x(t)$相等；

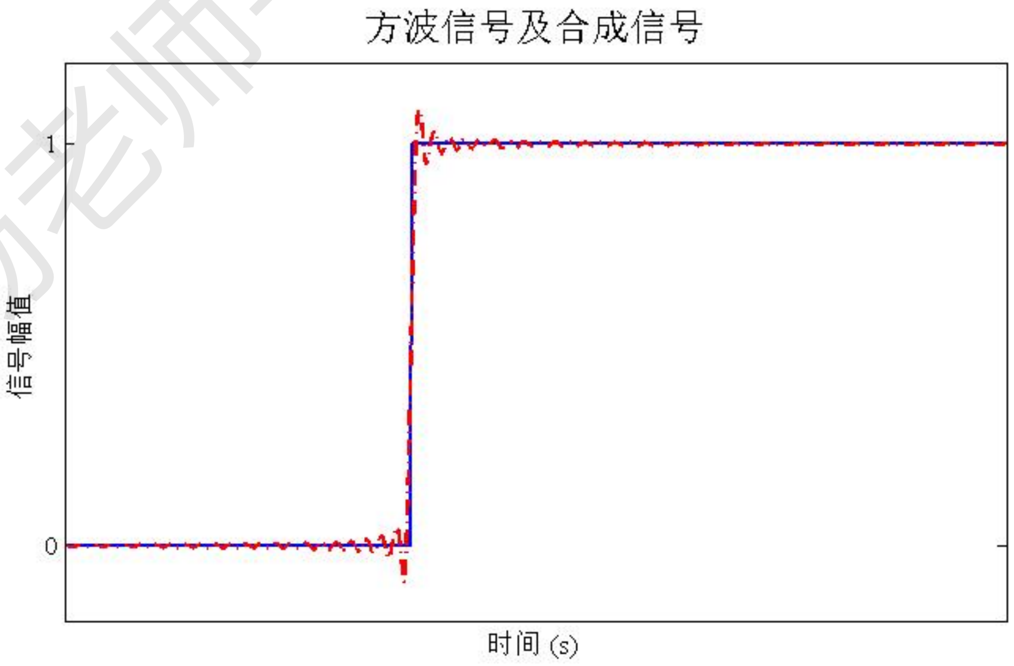
而在$x(t)$不连续的点上，无穷级数收敛于不连续点两边值的平均值。（会形成Gibbs现象）

连续时间周期信号的傅里叶级数



方波信号及其200次谐波的合成信号

FS：无穷为无穷的次谐波



Gibbs现象 讨论阶跃点

合成信号在接近不连续点将呈现高频起伏和超量的情况。超量的幅度不随拟合谐波的次数增加而变化。

谢谢大家，欢迎大家评论区多提意见，交流探讨！