数字信号处理：

连续时间非周期信号的傅里叶变换

	连续	离散
周期·级数	FS	DFS
非周期 变换	FT	DFT

主讲人：杨国财

哈尔滨工业大学 机电学院机器人研究所

邮箱：gc_yang@outlook.com

目录

- 1. 连续时间非周期信号的傅里叶变换
- 2. 连续时间周期信号的傅里叶变换
- 3. 连续时间傅里叶变换的性质

☑ FS:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$F(k\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

☑ FT:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

☐ DFS

☐ DFT

回顾：连续时间周期信号的傅里叶级数

定义：对于周期信号$x(t)$，其周期为T_0（模拟频率为$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$），若满足狄里赫利(Dirichlet conditions)条件，则**周期信号可表示为一系列成谐波关系(harmonically related)的复指数信号的线性组合：**

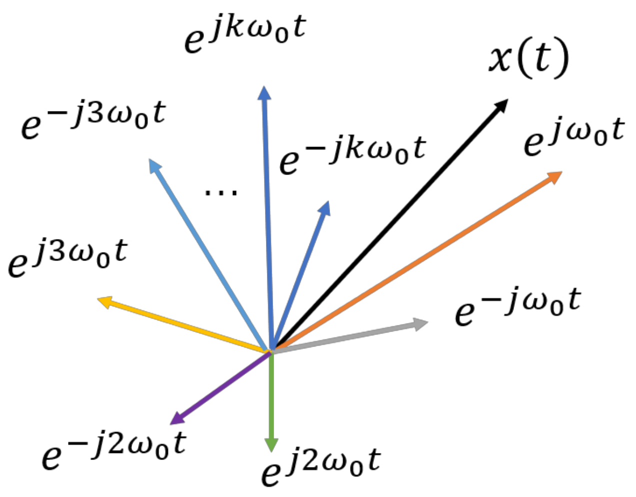
$k\Omega n$

FS 无穷多个谐波分量

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k\omega_0)\,e^{jk\omega_0 t}$$

低频 趋势

高频细节



其中，$F(k\omega_0)=\frac{\langle x(t),e^{jk\omega_0 t}\rangle}{\langle e^{jk\omega_0 t},e^{jk\omega_0 t}\rangle}=\frac{\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt}{\int_{-T/2}^{T/2}e^{jk\omega t}e^{-jk\omega_0 t}dt}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

☆ 物理含义：周期信号可以投影到复指数正交基上，其系数是信号在对应频率的基上的坐标，代表该频率的分量的强度。

问题1：连续时间周期信号的频谱是连续的还是离散的？

物理含义 十分重要

$X[k]=W^{kn}\,x(n)$

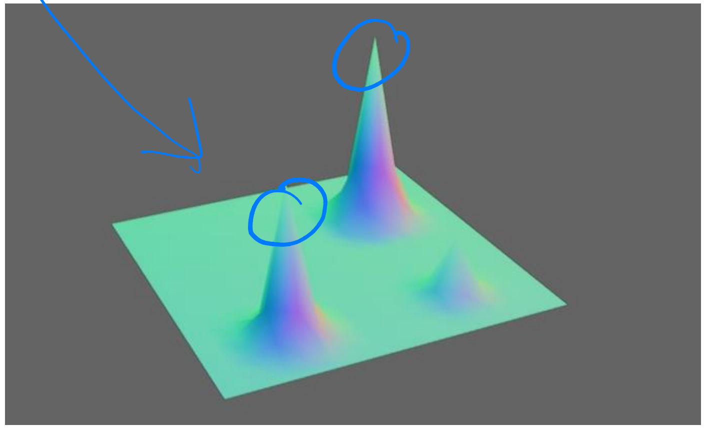
问题2：非周期信号怎么办？

☆ target ⇒ $x(n)=\sum_k X[k]\,W^{kn}$ 将原始表示为线性组合的形式

连续时间非周期信号的傅里叶变换

幅值压小

周期信号：时域→频域



非周期信号可以理解为周期为无穷大的周期信号。

周期 T变大
离散程度越小

ω_0
$2\omega_0$
$3\omega_0$

根据傅里叶级数，周期信号可以投影到不同频率的分量上：

分量响应强度

系数

$$F(k\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)\,e^{-j(k\omega_0)t}\,dt$$

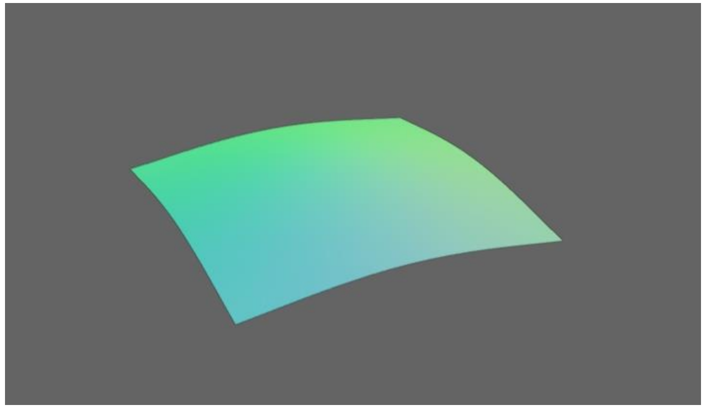
$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$

归一化因子

当$T_0\to\infty$时，$\omega_0\to 0$，此时，$k\omega_0$可以写成ω

$e^{-j\Omega kt}$

然而，$F(k\omega_0)\to 0$（没有意义）



内积值

定义频谱密度：$$\boxed{F(\omega)=T_0F(k\omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt}$$ 非周期信号的傅里叶变换

物理含义？

$e^{-j\Omega t}$ 无k

FS: $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F(k\Omega)\,e^{-j\Omega kt}$

FT: $F(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,e^{-j\Omega t}\,dt$

周期信号投影到整个频域 Ω 上。

不再只限离散的n个谐波分量，而是无穷多个 覆盖整个频域（无穷多个频率）

连续时间非周期信号的傅里叶变换

非周期信号可以理解为周期为无穷大的周期信号。 FT 以后，逐渐从频域组合回时域

根据傅里叶级数，周期信号写成不同频率分量线性组合的形式：

对比

单个 $W_0 = kW_0-(k-1)W_0 = \Delta k W_0$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k\omega_0)\,e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{F(k\omega_0)}{\omega_0}\omega_0 e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{F(k\omega_0)T_0}{2\pi}e^{jk\omega_0 t}\Delta(k\omega_0)$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$　　$T_0\to\infty$　$W_0\to 0$

当$T_0\to\infty$时，$\omega_0\to 0$，此时，$k\omega_0$可以写成ω（离散的自变量变为连续），$\Delta(k\omega_0)$可以写成$d\omega$，累加运算变为积分

级数 FS: $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F(k\Omega)e^{-j\Omega kt}$　　$\Delta(kW_0)\mapsto$ 连续 dW_0

所以，连续时间非周期信号可以写成：$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega}$　　非周期信号的傅里叶逆变换

研究思路 ① 求系数 权重响应

线性组合

② 组合回 原始信号 $x(t)$

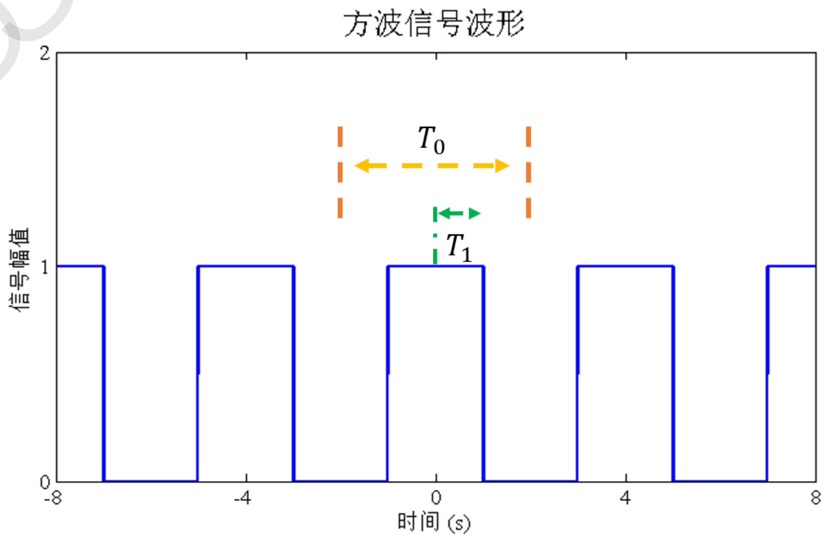
☑ FS　☐ DFS

☑ FT　☐ DFT

连续时间非周期信号的傅里叶变换

应用实例：

周期信号：$x(t)=\begin{cases}1, |t|<T_1 \\ 0, T_1<|t|<T_0/2\end{cases}$ 周期方波信号



解：对于$k=0, F(0\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)dt=\frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1}1dt=\frac{2T_1}{T_0}$ 即：占空比

对于$k\neq 0, F(k\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1}e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt=\frac{1}{T_0}\left[\frac{1}{-jk\frac{2\pi}{T_0}}\left(e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}T_1}-e^{jk\frac{2\pi}{T_0}T_1}\right)\right]=\frac{1}{k\pi}\frac{e^{jk\frac{2\pi}{T_0}T_1}-e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}T_1}}{2j}=\frac{1}{k\pi}sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}T_1\right)$

直流分量 谐波分量响应

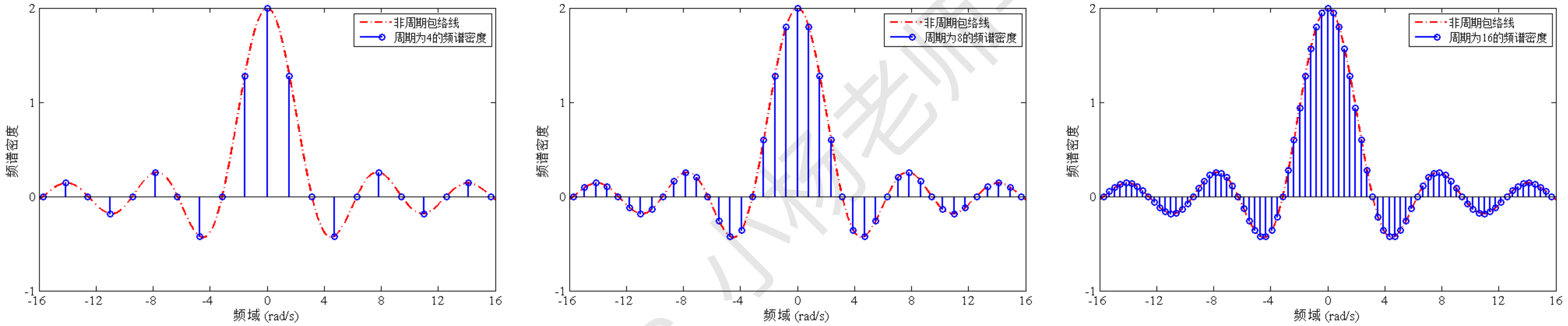
周期方波的傅里叶级数（频谱系数）为：$F(0\omega_0)=\frac{2T_1}{T_0}$， $F(k\omega_0)_{k\neq 0}=\frac{2sin(k\omega_0T_1)}{k\omega_0T_0}$ （将$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$和$\frac{1}{k\pi}=\frac{2}{k\omega_0T_0}$代入上式）

当$T_0\to\infty$时， $\omega_0\to 0$， 频谱密度函数的图像$T_0F(k\omega_0)=\frac{2sin(k\omega_0T_1)}{k\omega_0}$如何变化？ FS: $F(kW_0)e^{-jkW_0t}$

FT: 查…

连续时间非周期信号的傅里叶变换

频谱密度$T_0F(k\omega_0)$的图像：



$T_1=1,\ T_0=4$ $T_1=1,\ T_0=8$ $T_1=1,\ T_0=16$

如何理解上图：

随着T_0增大，ω_0减小，相同时间段内的谱线会变多。

当$T_0\to\infty$时，频谱密度函数由离散变为连续。**非周期信号的频谱密度是连续的！**

相同时间分辨率高 $f\downarrow$ $W=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$

连续时间非周期信号的傅里叶变换

总结：对于非周期信号$x(t)$，若满足狄里赫利(Dirichlet conditions)条件，则**非周期信号可表示为连续频率复指数信号的线性组合**：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

频域 → 时域

FT

其中，$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}dt$。 时域→频域

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(k\omega)\, e^{jk\omega t}$ 频域→时域 FS

第1种条件：**非周期信号$x(t)$的能量是有限的**，即：$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt < \infty$

当满足这一条件时，$F(\omega)$一定是存在的。**但这种条件无法保证原信号与傅里叶分解形式在每一个值上都相等，只能保证两者在能量上没有差别。**

即：对于误差信号$e(t) = x(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$，上述条件只能保证$\int_{-\infty}^{\infty}|e(t)|^2dt = 0$

$F(k\omega) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega t}\, dt$

时域→频域

第2种条件：狄里赫利(Dirichlet conditions)条件组

这两种条件仅是充分条件，并非必要条件！

条件1：$x(t)$绝对可积，即：$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < \infty$

条件2：在任意有限区间内，$x(t)$的最大值和最小值数目有限

条件3：在$x(t)$的任意有限个区间内，只有有限个不连续点，而且在这些不连续点上，函数是有限值。

某些周期信号在$[-\infty, \infty]$区间并不绝对可积，也不具备平方可积，但仍存在傅里叶变换。

连续时间周期信号的傅里叶变换 FS

FS series

讨论傅里叶级数的时候，周期信号$x(t)$是分解到一系列成谐波关系的单位圆上的复指数信号$e^{jk\omega_0 t}$上；

x(t) 分解到单位圆上的复指数信号 (谐波关系)

假设$e^{jk\omega_0 t}$存在傅里叶变换，我们就可以将周期信号$x(t)$分解出来的每一个分量，继续进行傅里叶变换，这样就能得到周期信号的傅里叶变换的结果；

在讨论$e^{jk\omega_0 t}$的傅里叶变换之前，我们先看一下$e^{jk\omega_0 t}$的能量和它的绝对可积的结果。

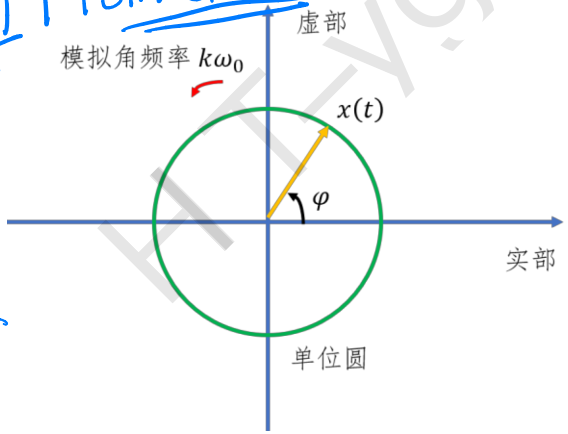
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{jk\omega_0 t}\right|^2 dt$$

cos(kW0t) + jsin(kW0t)

信号能量

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{jk\omega_0 t}\right| dt$$

绝对可积



$e^{jk\omega_0 t}$的模长始终为1，

所以，两个积分式子的结果均为$\int_{-\infty}^{\infty} 1dt = \infty$

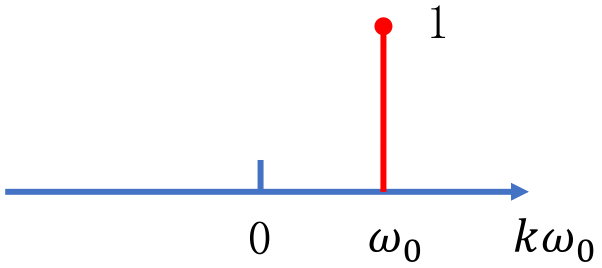
表明：该式子并不满足狄里赫利条件，也不满足能量有限条件，**但该信号仍有傅里叶变换，其结果是奇异函数。**

连续时间周期信号的傅里叶变换

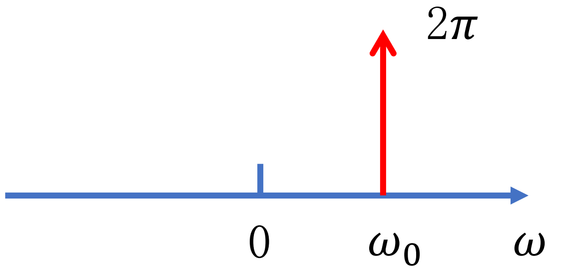
频谱密度$F(\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$对应的信号？

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega_0 t}d\omega=e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)d\omega=e^{j\omega_0 t}$$

对于周期信号$e^{j\omega_0 t}$：



傅里叶级数，频谱



傅里叶变换，频谱密度

基于$e^{j\omega_0 t}$的傅里叶变换$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$，

周期信号的傅里叶级数可以统一至傅里叶变换：

若根据表达式$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$，已经求得$F(k\omega_0)$，则对其中的每一项乘以$2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$，即可得到傅里叶变换：

$$\boxed{F(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi F(k\omega_0)\delta(\omega-k\omega_0)}$$

连续时间信号的傅里叶变换

至此，对于连续时间信号，无论是周期的，还是非周期的，其频域上的分解与合成，都可以统一至傅里叶变换。

$$x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}F(\omega)$$

分析式：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\omega t}dt$　　分解到整个连续的频域上

综合式：$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$　　对整个频域的信息进行重组恢复出原信号，系数是$\frac{1}{2\pi}F(\omega)$

注意！实际上，$F(\omega)$为频谱密度函数，并非傅里叶级数得到的频谱，但因为傅里叶级数可以统一到傅里叶变换中，很多教材就对频谱和频谱密度不做严格区分，都称之为频谱，但实际上二者是有区别的。

需要记住一些**常用函数的傅里叶变换**，并掌握**傅里叶变换的性质**。基于性质和常见的变换得到复杂函数的傅里叶变换。

连续时间傅里叶变换的性质

性质1：共轭与共轭对称性

若：$x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(\omega)$，则：$x^*(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X^*(-\omega)$

推论：实函数信号的图像——幅度谱是偶对称的，相位谱是奇对称的。

证明如下：若$x(t)$为实函数，则有： $x^*(t)=x(t)$

那么$x^*(t)$的傅里叶变换与$x(t)$一致，均为$X(\omega)$

又因为根据性质1（共轭与共轭对称性），有：$x^*(t)$的傅里叶变换为$X^*(-\omega)$，

因此： $X^*(-\omega)=X(\omega)$，将ω代换成$-\omega$，有： $X^*(\omega)=X(-\omega)$

把$X(\omega)$写成实部+虚部的形式： $X(\omega)=Re\{X(\omega)\}+Im\{X(\omega)\}$

$X^*(\omega)\ \ =Re\{X(\omega)\}\ \ -Im\{X(\omega)\}$

$X(-\omega)=Re\{X(-\omega)\}+Im\{X(-\omega)\}$

上述两式对应相等，则有：

$Re\{X(\omega)\}=Re\{X(-\omega)\}$ 实部偶对称； $-Im\{X(\omega)\}=Im\{X(-\omega)\}$ 虚部奇对称

幅度：$\sqrt{实部^2+虚部^2}$，相位：$arctan\left(虚部/_{实部}\right)$，因此，幅度谱是偶对称的，相位谱是奇对称的。

注意！！！

傅里叶变换得到的是一个**复函数。**

复数可以写成实部，虚部的形式；

也可以写成**幅度**和**相位**的形式。

幅度一定是正的，代表模长！

那么负实数如何表示？

幅度为绝对值，相位为180°

连续时间傅里叶变换的性质

性质2：时间与频率的尺度变换

若：$x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(\omega)$，则：$x(at)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

时域上进行压缩，相应地，频域会被拉宽。

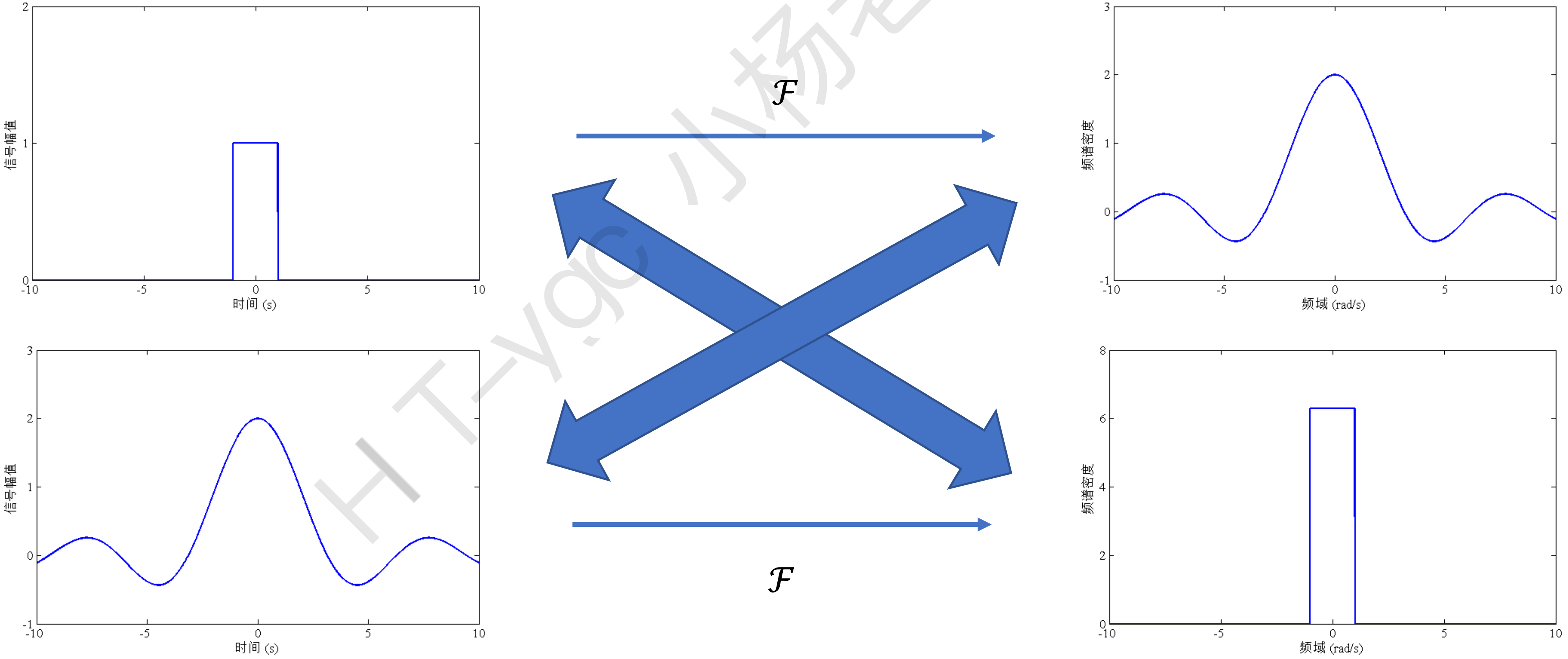
以2倍速播放语音，语音的频率会变高。

原速度　　2倍速　　0.5倍速

连续时间傅里叶变换的性质

性质3：对偶性

若： $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega)$，则：$X(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi x(-\omega)$



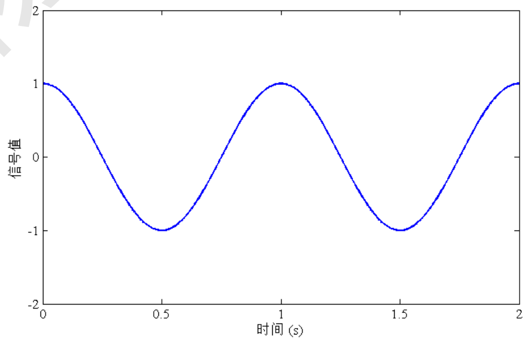
连续时间傅里叶变换的性质

性质4：帕斯瓦尔定理

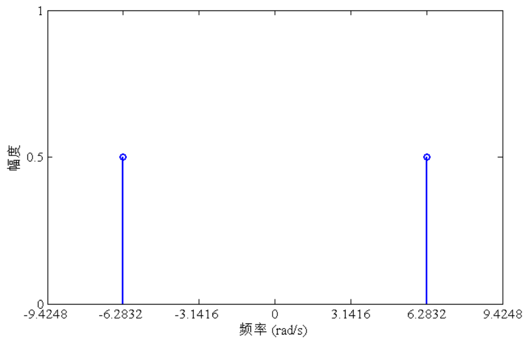
若： $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega)$，则：$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,d\omega$

信号的总能量既可以按每单位时间内的能量$|x(t)|^2$在整个时间内积分计算，也可以按照每单位频率内的能量$\frac{1}{2\pi}|X(\omega)|^2$在整个频率范围内积分得到。

$|X(\omega)|^2$称之为能量谱密度图像。



$x(t) = cos(2\pi t)$



功率：$0.5^2 + 0.5^2 = 0.5$

对于周期信号，上式没有意义，$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt = \infty$，考虑其功率：

$\frac{1}{T}\int_T|x(t)|^2dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|F(k\omega_0)|^2$，周期信号的功率，等于其频谱（**不是频谱密度**）模长的平方的累加和。

连续时间傅里叶变换的性质

性质5：时移性质

若： $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(\omega)$，则：$x(t-t_0)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}e^{-j\omega t_0}X(\omega)$

信号在时间上的移位，**并不改变它的傅里叶变换的模长，只是在变换中引入相移**，且相移与频率ω成线性关系，对于频率越高的分量，移位越多。

注： 对于特定的$\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{e^{-j\omega t_0}}$**为单位圆上的复数，模长始终为1**，因此不改变傅里叶变化的模长，只改变相位。

连续时间傅里叶变换的性质

性质6：微分与积分性质

若：$x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(\omega)$，则：$\frac{dx(t)}{dt}\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}j\omega X(\omega)$，$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(\omega)\delta(\omega)$

性质7：线性性质

若：$x_1(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X_1(\omega)$，$x_2(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X_2(\omega)$，

则：$ax_1(t)+bx_2(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}aX_1(\omega)+bX_2(\omega)$

连续时间傅里叶变换的性质

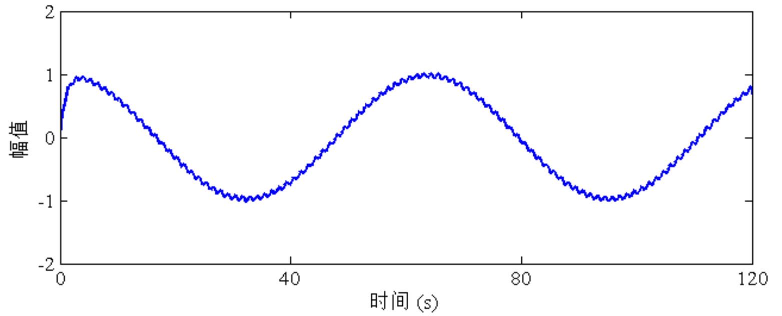
性质8：卷积性质

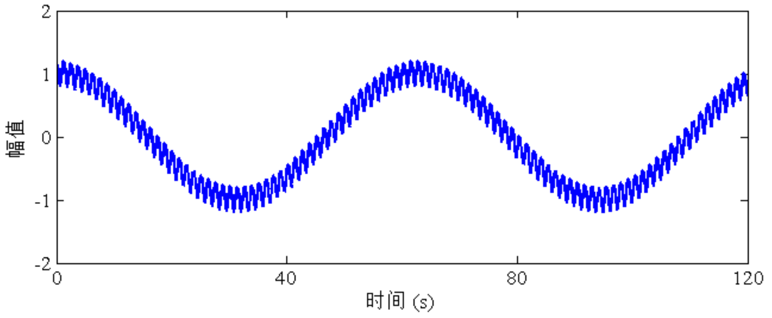
若：$x_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(\omega)$， $x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(\omega)$，

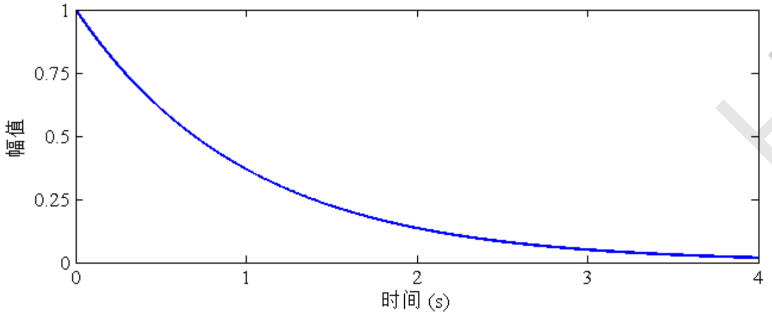
则：$x(t) = x_1(t) * x_2(t)$, $X(\omega) = X_1(\omega) X_2(\omega)$

时域上的卷积对应频域上的乘法，该性质是系统对信号响应的核心。

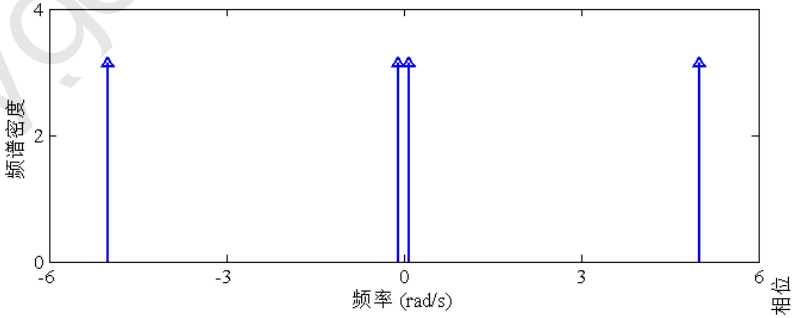
滤波后的结果



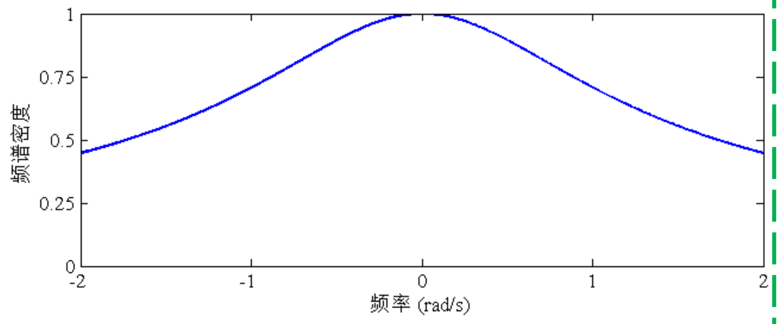


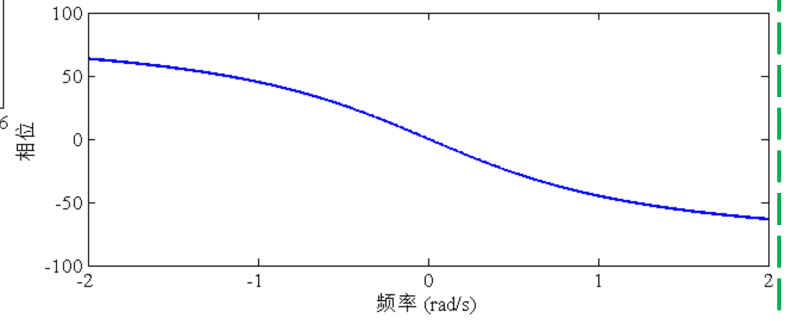


$x(t) * h(t)$



$X(\omega)H(\omega)$





连续时间傅里叶变换的性质

性质9：相乘性质

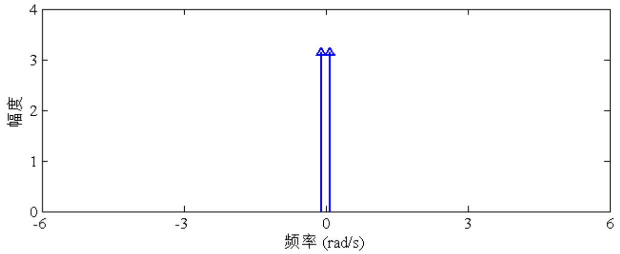
若：$x_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(\omega)$， $x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(\omega)$，

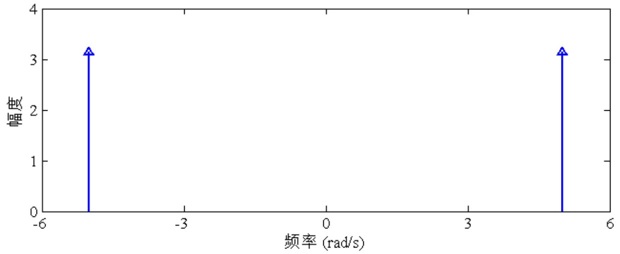
则：$x(t) = x_1(t)x_2(t),\ X(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

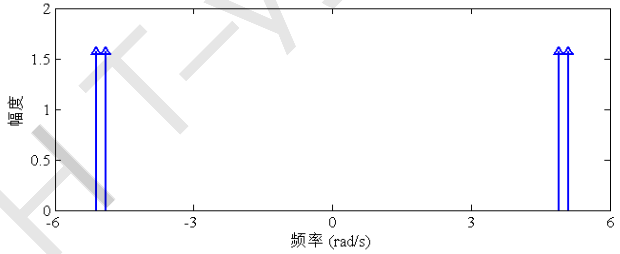
时域上的乘法对应频域上的卷积，该性质是信号调制的基础。

$\lambda = {}^{c}/_{f}$，发射信号的天线尺寸与信号波长成正比，波长越大，天线尺寸越大

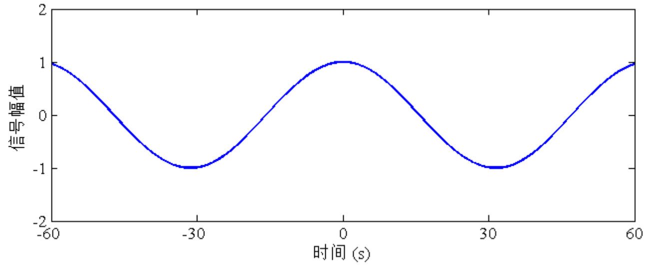
减小天线尺寸，需要提高信号频率，将低频信号调制到高频，再发送。高频信号也称载波信号。

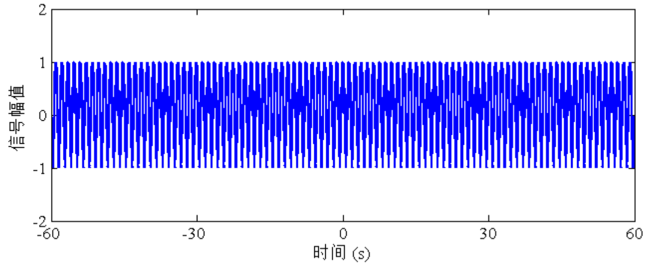


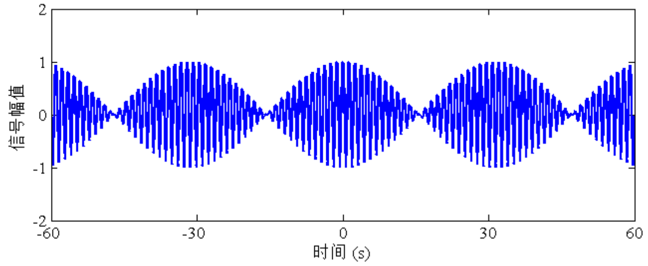




$X_1(\omega) * X_2(\omega)$







$x_1(t)x_2(t)$

思考：$cos(0.1t)cos(5t) = ?$

$$\frac{1}{2}cos(4.9t) + \frac{1}{2}\cos(5.1t)$$

谢谢大家，欢迎大家评论区多提意见，交流探讨！