数字信号处理：
离散时间周期信号的傅里叶级数

主讲人：杨国财

哈尔滨工业大学 机电学院机器人研究所

邮箱：gc_yang@outlook.com

目录

- 1. 离散时间周期信号的傅里叶级数
- 2. 存在性（收敛性）问题

FT：分解出来分量覆盖整个频域
无穷多个无穷小频率分量的组合

回顾：连续时间周期信号的傅里叶级数

FS → FT

T=∞

一个个离散的

定义：对于周期信号$x(t)$，其周期为T_0（模拟频率为$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$），若满足狄里赫利(Dirichlet conditions)条件，则**周期信号可表示为一系列成谐波关系(harmonically related)的复指数信号的线性组合**：

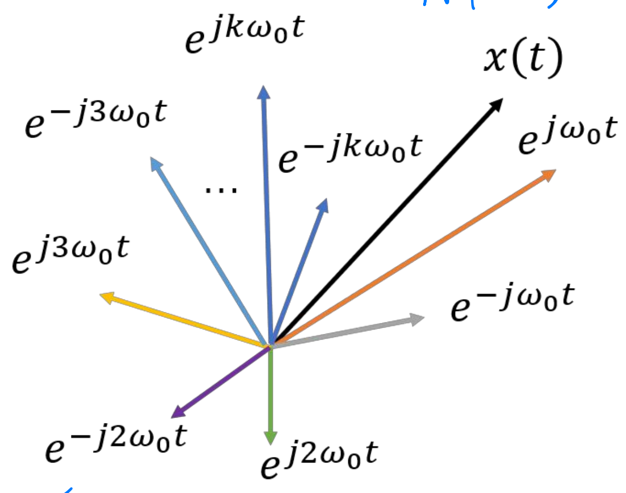
谐波

原信号x(t)在该基$e^{jk\omega_0 t}$上投影

单位圆上

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k\omega_0)\,e^{jk\omega_0 t}$$

$|e^{jk\omega_0 t}|=1$



图形化解释

其中，$F(k\omega_0)=\frac{\langle x(t),e^{jk\omega_0 t}\rangle}{\langle e^{jk\omega_0 t},e^{jk\omega_0 t}\rangle}=\frac{\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt}{\int_{-T/2}^{T/2}e^{jk\omega t}e^{-jk\omega_0 t}dt}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

对于离散时间周期信号$x[n]$，其周期记为N_0，相应地数字角频率$\Omega_0=\frac{2\pi}{N_0}$，是否也可以表示成一系列离散时间复指数信号$e^{jk\Omega_0 n}$的线性组合？ 注意? 该复指数信号? FS: $e^{j\omega_0 kn}$ $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$

离散时间周期信号的傅里叶级数（DTFS）DTFS

答案是肯定的。

项数无限，频谱离散

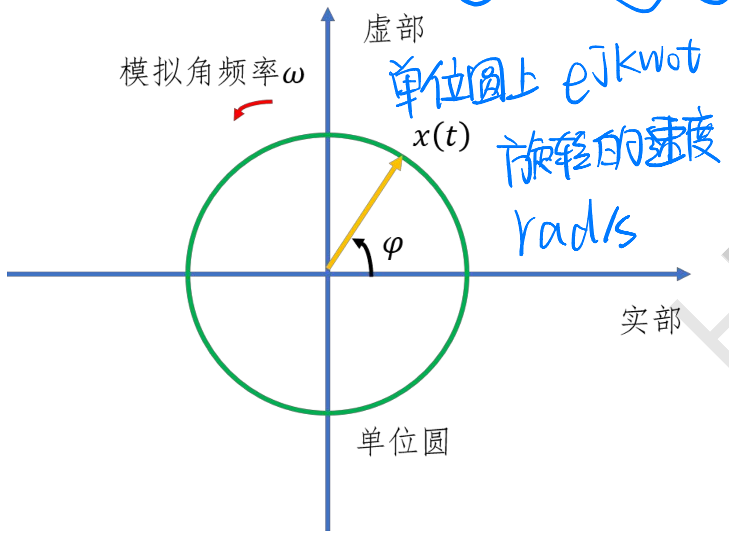
那么，离散时间周期信号的傅里叶级数与连续时间形式有何种不同，更具体的说：

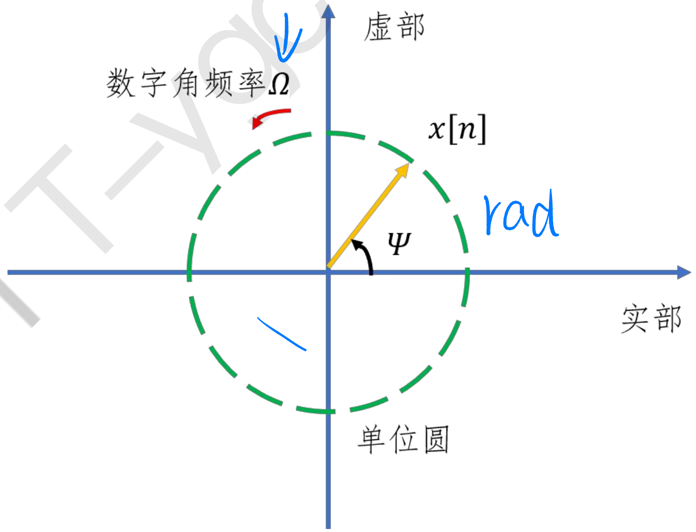
$N-1$

问题1：离散时间周期信号的傅里叶级数的项数是有限的还是无限的？　　项数是有限的。

问题2：离散时间周期信号傅里叶级数对应的频谱特点（是否离散，是否周期）？　　频谱是周期的。离散

切入点：对比基函数$e^{jk\omega_0 t}$与$e^{jk\Omega_0 n}$的不同。$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ 同一个的结果





对于$e^{jk\Omega_0 n}$，$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$

当$k = 0$时，$e^{j0\Omega_0 n} = 1$　直流分量

当$k = N_0$时，$e^{j2\pi n} = 1$　直流分量

当$k = 1$，$N_0 + 1$时，$e^{j(N_0+1)\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 n}e^{j2\pi n} = e^{j\Omega_0 n}$

当$k\Omega_0$在π附近，变化频率最快　反复横跳

$\frac{N_0}{2}$　π附近　高频分量

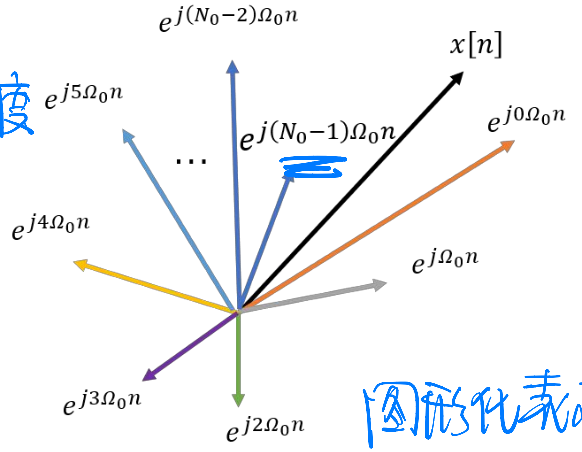
数字角频率表示离散的间隔，而且**离散时间的复指数信号，针对k是周期的。**

离散时间周期信号的傅里叶级数（DTFS）

定义：对于离散时间周期信号$x[n]$，其周期为N_0（数字角频率为$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$），信号可表示成一系列离散时间单位圆上复指数信号的线性组合：

Ω_0: rad 弧度

转/度　在2π上转/度



DTFS综合式，**累加和的变量为**k

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} F(k\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 n}$$

图形化表示

依然内积之比

其中，$F(k\Omega_0) = \dfrac{\langle x[n], e^{jk\Omega_0 n}\rangle}{\langle e^{jk\Omega_0 n}, e^{jk\Omega_0 n}\rangle} = \dfrac{\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}}{\sum_{n=0}^{N_0-1} 1} = \dfrac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}$　DTFS分析式，**累加和的变量**n

DFS

注意：k的范围仅是一个周期，实际上，起点并不用是0，只要能涵盖一个周期即可，例如：$[3, N_0+2]$

究其原因，信号$e^{jk\Omega_0 n}$，$\boxed{\text{针对}k\text{是周期的}}$。

$T = N_0$　采样点

离散时间周期信号的傅里叶级数（DTFS）

DFS 0 1 2 3

实例：周期为4的离散时间信号$x[n] = [0$（n = 0时），1，-1，0]，求解其傅里叶级数。

1 j −1 −j

其基波频率$\Omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$，信号中含有的复指数分量有4项：1，$e^{j\frac{\pi}{2}n}$，$e^{j\pi n}$，$e^{j\frac{3\pi}{2}n}$

直流 1次 2次 3次

根据DTFS分析式$F(k\Omega_0) = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}$，可以求解各个分量对应的系数：

频率最快

模长~相位 $0e^{j0}$ 累加和

$$F(0\Omega_0) = \frac{1}{4}\left(0e^{-j0\frac{\pi}{2}0} + 1e^{-j0\frac{\pi}{2}1} + (-1)e^{-j0\frac{\pi}{2}2} + 0e^{-j0\frac{\pi}{2}3}\right) = 0$$

$$F(1\Omega_0) = \frac{1}{4}\left(0e^{-j1\frac{\pi}{2}0} + 1e^{-j1\frac{\pi}{2}1} + (-1)e^{-j1\frac{\pi}{2}2} + 0e^{-j1\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{1}{4}(-j+1) \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

arctan −1

an bn

$$F(2\Omega_0) = \frac{1}{4}\left(0e^{-j2\frac{\pi}{2}0} + 1e^{-j2\frac{\pi}{2}1} + (-1)e^{-j2\frac{\pi}{2}2} + 0e^{-j2\frac{\pi}{2}3}\right) = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\sqrt{a^2+b^2}\, e^{-j\arctan\frac{b}{a}}} \frac{1}{2}e^{j(-\pi)}$$

a+bj

0是直流分量

$$F(3\Omega_0) = \frac{1}{4}\left(0e^{-j3\frac{\pi}{2}0} + 1e^{-j3\frac{\pi}{2}1} + (-1)e^{-j3\frac{\pi}{2}2} + 0e^{-j3\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{1}{4}(j+1) \quad \frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

小就是负的了 arctan 1

F(-1Ω0+4Ω0)=F(3Ω0) 4Ω0 周期性

模长=半 相角异号

问题1：$F(-1\Omega_0)$，$F(-2\Omega_0)$，$F(-3\Omega_0)$的取值分别为多少？

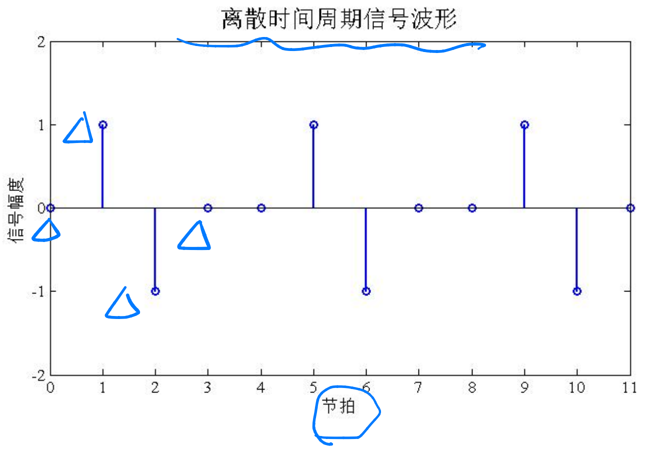
=F(2Ω0) F(Ω0) 周期性

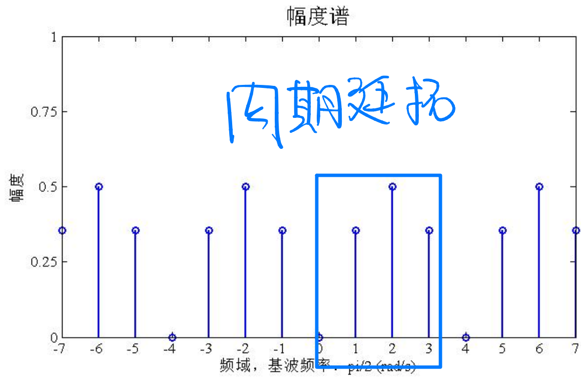
问题2：$F(4\Omega_0)$，$F(5\Omega_0)$，$F(6\Omega_0)$，$F(7\Omega_0)$的取值分别为多少？

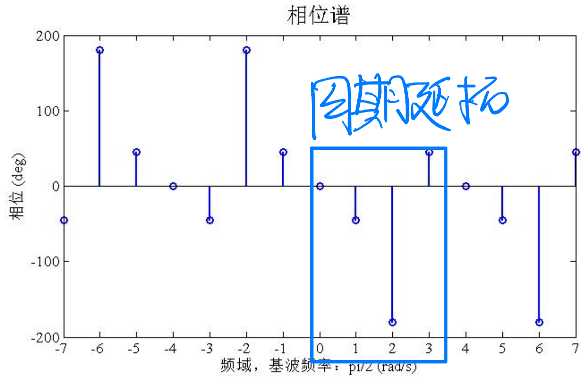
周期性 F(-Ω0)=F(3Ω0)

共轭对称性 F(-Ω0)=F*(1Ω0)

☆ 傅立叶分析得到的结果一定是复指数





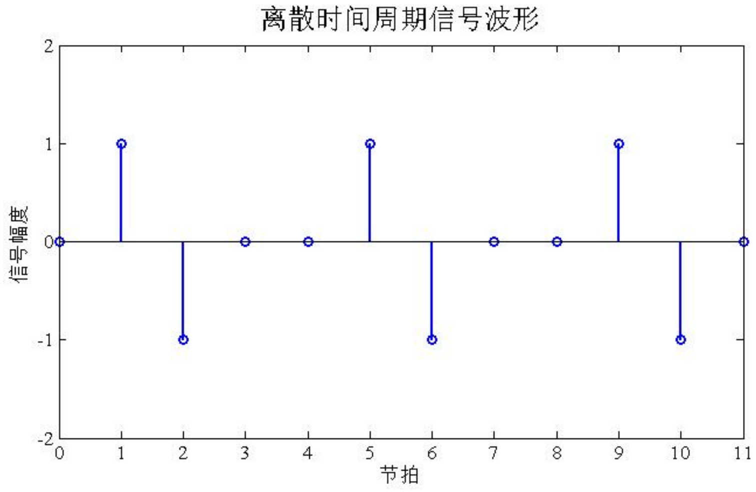


模长/幅度相同。相位奇对称 2种角度结果一样

同时满足左右两端 幅度偶对称 相位奇对称

离散时间周期信号的傅里叶级数（DTFS）

∴傅里叶 3种形式
- $x(t)$ 原始信号 时域
- 三角形式 时域&频域
- 复指数 频域 模长、相角形式



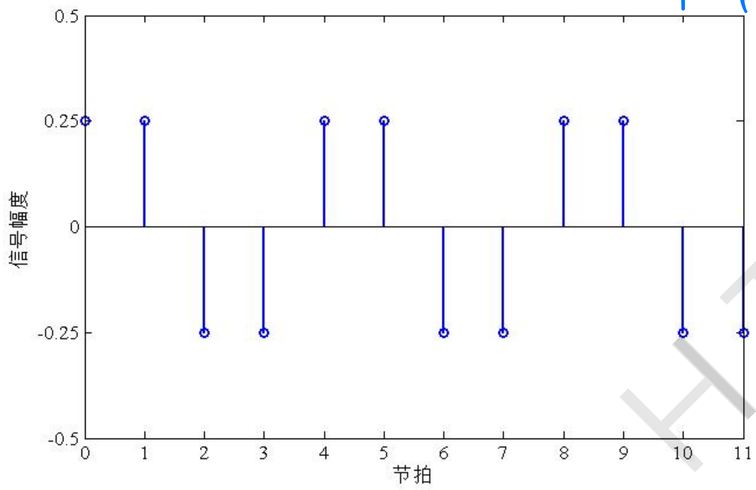
原信号可以分解成时域中三个余弦信号的组合

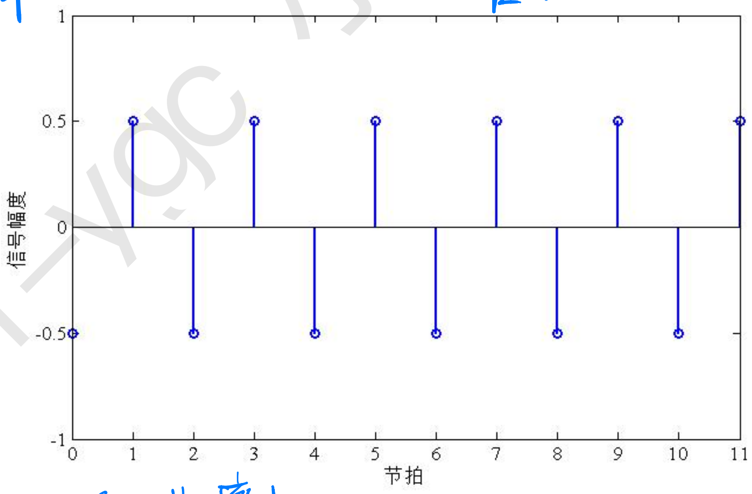
☆问题：不是分解得到的是复指数信号吗，为什么这里是余弦信号？

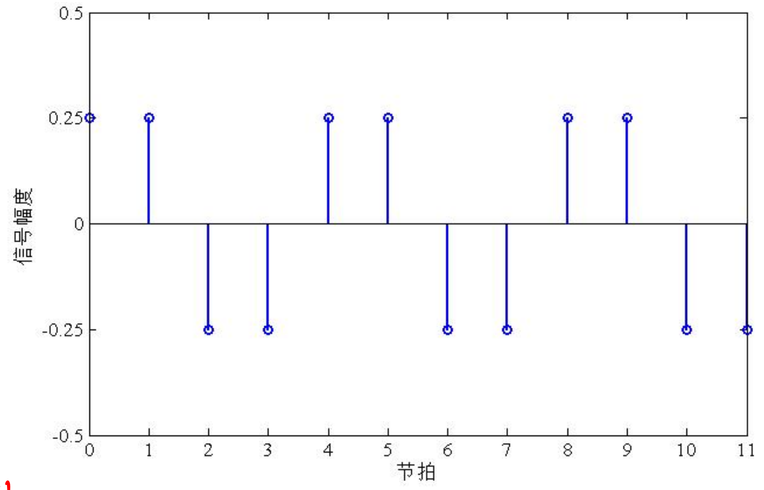
复指数信号是一种数学工具，引入该信号后，分析形式变得简单，统一；

但真实物理世界的信号都是实数信号。

$k=1$ $\frac{\sqrt{2}}{4}e^{j(-\frac{\pi}{4})}$ $k=2$ $\frac{1}{2}e^{j(-\pi)}$ $k=3$ $\frac{\sqrt{2}}{4}e^{j(\frac{\pi}{4})}$







分解到哪个频率上

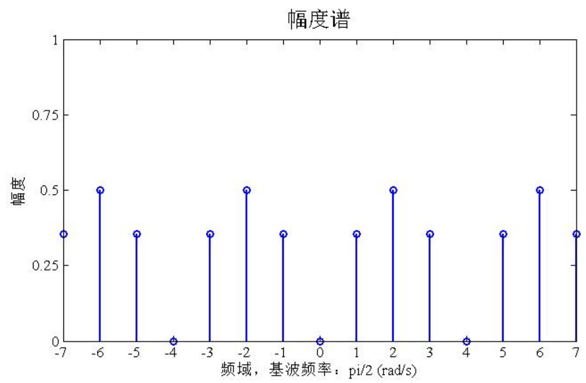
初相位。

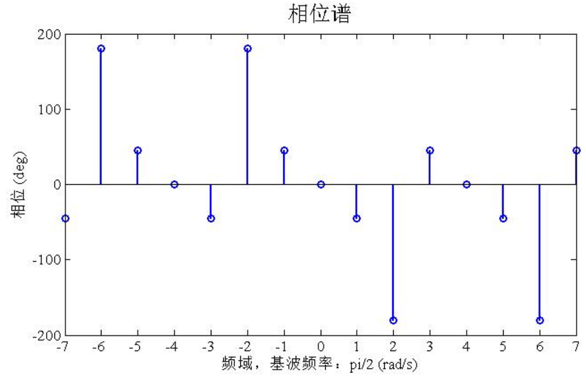
$$x_1[n]=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x_2[n]=\frac{1}{2}\cos(\pi n-\pi)$$

$$x_3[n]=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\frac{3\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)$$

离散时间周期信号的傅里叶级数（DTFS）





欧拉公式： $e^{jx} = cosx + jsinx$

重要变形： $cosx = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$

证明：

$e^{jx} = cosx + jsinx$

$e^{-jx} = cos(-x) + jsin(-x) = cosx - jsinx$

直流分量　基波　2次谐波　3次次谐波

以 $k = 0\sim3$ 这4项进行线性组合：

原始信号　模　相角

$$x[n] = 0 + \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \boxed{\frac{1}{2}e^{j(-\pi)}}e^{j\pi n} + \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}}e^{j\frac{3\pi}{2}n}$$

以 $k = -3\sim0$ 这4项进行线性组合：

$-3\Omega n$　$-2\Omega n$　$-1\Omega n$　直流

$$x[n] = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}e^{-j\frac{3\pi}{2}n} + \frac{1}{2}e^{j(\pi)}e^{-j\pi n} + \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}e^{-j\frac{\pi}{2}n}} + 0$$

周期性 & 共轭

模长相等

相角相反

$F(0\Omega_0)$　$F(1\Omega_0)$　$F(2\Omega_0)$　$F(3\Omega_0)$

$F(-3\Omega_0)$　$F(-2\Omega_0)$　$F(-1\Omega_0)$　$F(0\Omega_0)$

共轭

两式相加： $F(-3\Omega_0) = F(1\Omega_0)$　$F(-2\Omega_0) = F(2\Omega_0)$　$F(-1\Omega_0) = F(3\Omega_0)$

$$2x[n] = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}e^{-j\frac{3\pi}{2}n} + \frac{1}{2}e^{j(\pi)}e^{-j\pi n} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}e^{-j\frac{\pi}{2}n} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2}e^{j(-\pi)}e^{j\pi n} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}e^{j\frac{3\pi}{2}n}$$

$$2x[n] = \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}e^{-j\frac{3\pi}{2}n} + e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}e^{j\frac{3\pi}{2}n}\right\} + \frac{1}{2}\left\{e^{j(\pi)}e^{-j\pi n} + e^{j(-\pi)}e^{j\pi n}\right\} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}e^{-j\frac{\pi}{2}n} + e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}e^{j\frac{\pi}{2}n}\right\}$$

方向相反的复指数信号组合成余弦信号

双边谱、单边谱？

$$2x[n] = \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{2cos\left(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)\right\} + \frac{1}{2}\{2cos(\pi n - \pi)\} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{2cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

①可是为什么要做这一步！

$k = -3\sim0$　$x[n]$

最终有：

$2cosx$

$$x[n] = \frac{\sqrt{2}}{4}cos\left(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}cos(\pi n - \pi) + \frac{\sqrt{2}}{4}cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$$

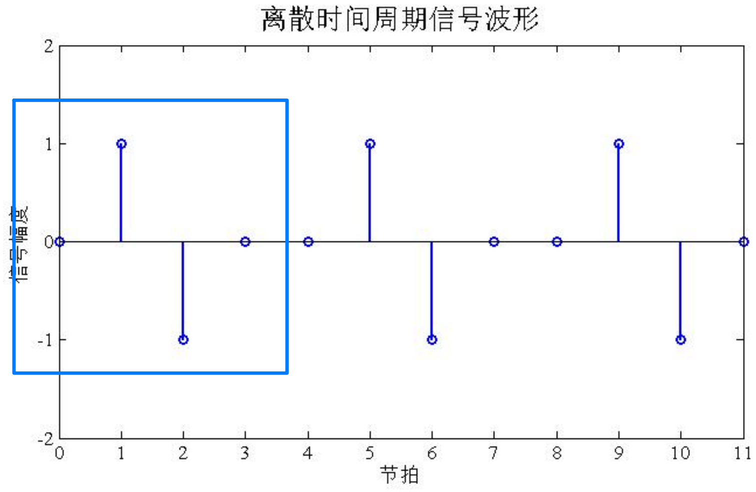
级数

② $a+bj = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{j\arctan\frac{b}{a}}$

DS. FS 在哪个位置上？ $e^{jk\Omega n}$

离散时间周期信号的傅里叶级数（DTFS）

DFT: $e^{-jk\Omega n}$



第1幅图和第3幅图完全相同，是PPT上整错了吗？

复指数 & 余弦表示 有双边谱 单边谱

并不是，证明如下： 周期性 奇偶性

$$x[n]=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\frac{3\pi}{2}n-2\pi n+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right)$$

回想一下，讲信号合成与分解的时候，我们讲以余弦信号为基分解得到单边谱，转换到复指数信号为基，得到双边谱，双边谱是单边谱进行幅度减半，做偶对称；相位奇对称得到。

那为什么刚才由复指数信号转换到余弦信号，没有幅度翻倍呢？

其实离散时间的对称轴不是原点，而是$(k\Omega_0)=\pi$，因此，彻底写成单边谱的形式为：

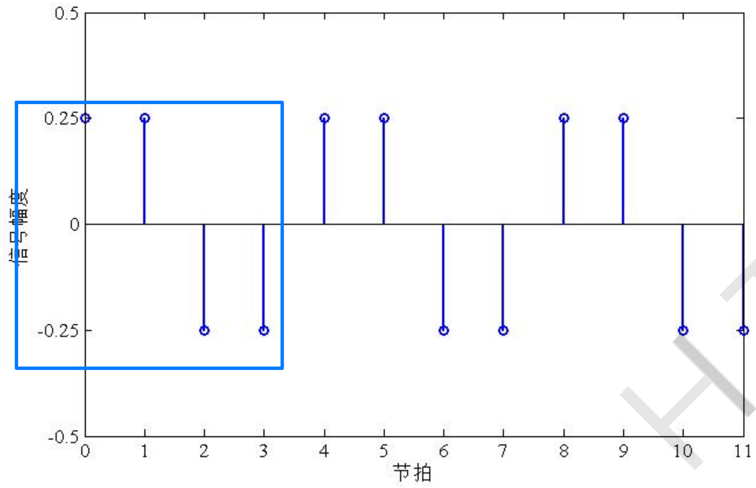
周期
奇偶
共轭

分开 P1 & P3

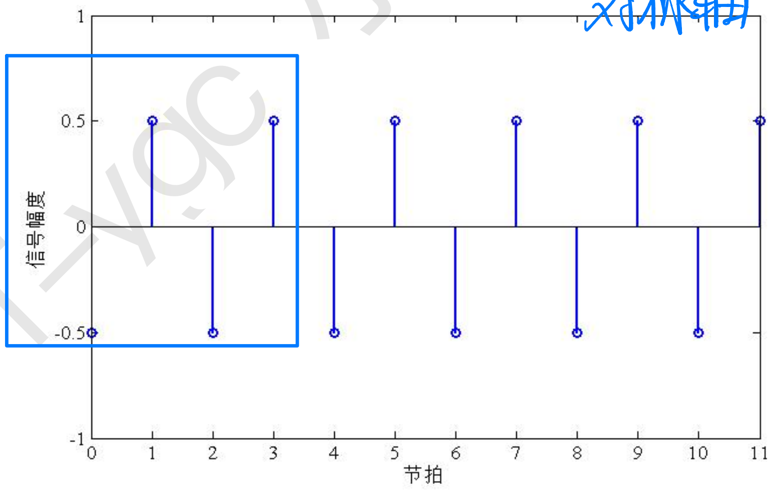
$$x[n]=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\pi n-\pi\right)$$

对称轴

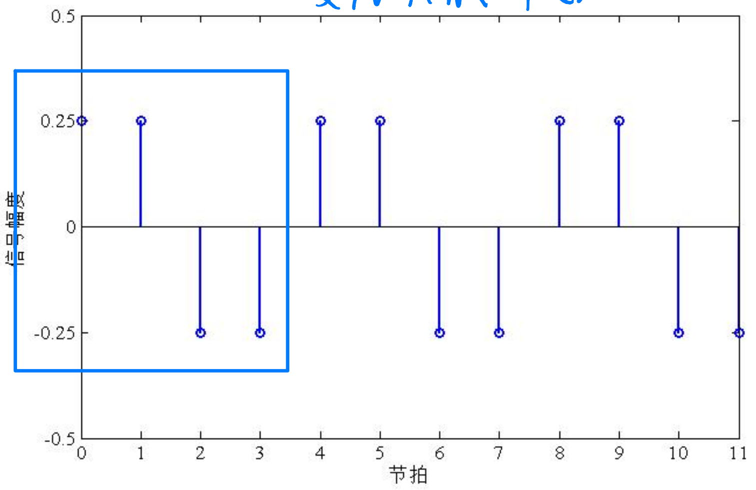
变化十分奇妙



$$x_1[n]=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right)$$



$$x_2[n]=\frac{1}{2}\cos\left(\pi n-\pi\right)$$



$$x_3[n]=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\frac{3\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)$$

离散时间周期信号的傅里叶级数（DTFS）

以$k=0\sim3$这4项进行线性组合：

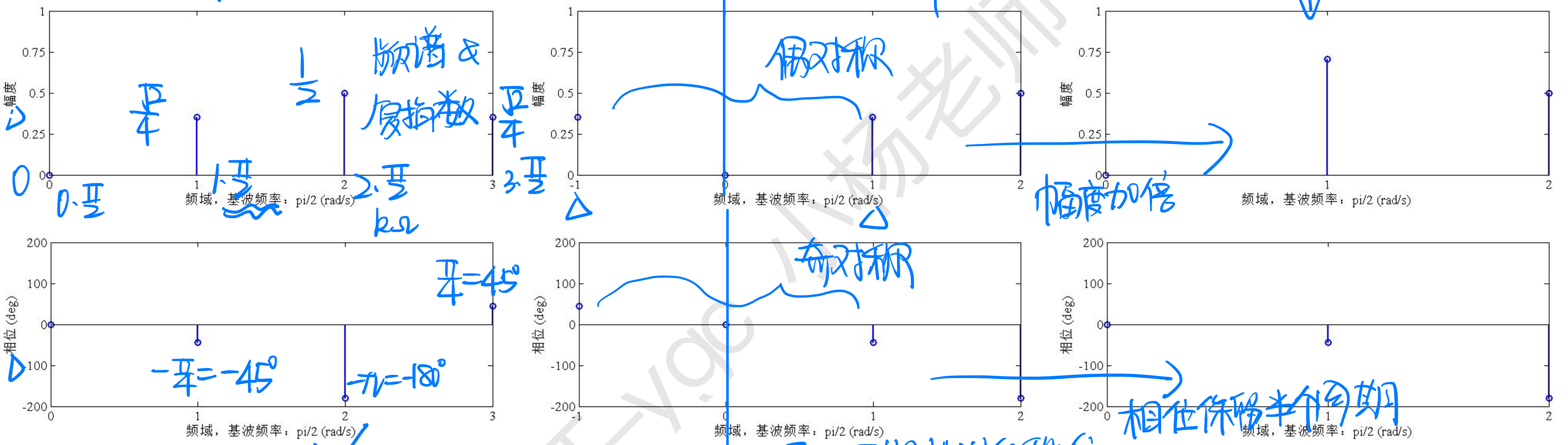
直流分量　基波　2次谐波　3次谐波

原始信号　模　相角

$$x[n]=0+\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}e^{j\frac{\pi}{2}n}+\boxed{\frac{1}{2}e^{j(-\pi)}}e^{j\pi n}+\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}}e^{j\frac{3\pi}{2}n}$$

移位后 再从双边谱 转位单位谱

一个周期内的频谱



以复指数信号$e^{jk\Omega_0 n}$为基，一个周期的频谱，区间：$k\Omega_0\in[0,\ 2\pi)$

对称轴入　general

以复指数信号$e^{jk\Omega_0 n}$为基，一个周期的频谱，区间：$k\Omega_0\in(-\pi,\ \pi]$

Ω	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
	$-\Omega$	0	Ω	2Ω

对称轴入

以余弦信号$\cos(k\Omega_0 n)$为基，一个周期减半，对称谱线合并，幅度加倍，相位保留半个周期。区间：$k\Omega_0\in[0,\ \pi]$

存在性（收敛性）问题

以 = DFS (级数)
① 双边谱、单边谱
② 三角形式、复指数形式
③ 周期性、对称性、奇偶性

$e^{-jk\Omega_0 n}$
关于 N_0 周期
不对称

对于连续时间周期信号的傅里叶级数，并非所有信号都存在傅里叶级数$F(k\omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$，那么对于离散时间周期信号，其傅里叶级数一定存在吗，如果存在，那么得到的分解与原信号完全相等吗？

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N_0-1}F(k\Omega_0)\,e^{jk\Omega_0 n}$$

本质上，就是求解N_0个系数：$F(0\Omega_0)$，$F(1\Omega_0)$，$F(2\Omega_0)$，…，$F((N_0-1)\Omega_0)$

那么，将$x[n]$在一个周期内的取值，代入$x[n]=\sum_{k=0}^{N_0-1}F(k\Omega_0)\,e^{jk\Omega_0 n}$，能得到$N_0$个方程：

$$x[0]=F(0\Omega_0)+F(1\Omega_0)+F(2\Omega_0)+\ldots+F((N_0-1)\Omega_0)$$

$$x[1]=F(0\Omega_0)+F(1\Omega_0)e^{j\Omega_0}+F(2\Omega_0)e^{j2\Omega_0}+\ldots+F((N_0-1)\Omega_0)e^{j(N_0-1)\Omega_0}$$

$$x[2]=F(0\Omega_0)+F(1\Omega_0)e^{j2\Omega_0}+F(2\Omega_0)e^{j4\Omega_0}+\ldots+F((N_0-1)\Omega_0)e^{j2(N_0-1)\Omega_0}$$

…

$$x[N_0-1]=F(0\Omega_0)+F(1\Omega_0)e^{j(N_0-1)\Omega_0}+F(2\Omega_0)e^{j2(N_0-1)\Omega_0}+\ldots+F((N_0-1)\Omega_0)e^{j(N_0-1)(N_0-1)\Omega_0}$$

N_0个未知数　N_0个方程

存在性（收敛性）问题

DFT

√ FS　　DTFS √ eq ☆

√ FT　　DTFT

DTFS

DFS 的矩阵形式

将其写成矩阵形式：

☆

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{j\Omega_0} & e^{j2\Omega_0} & \cdots & e^{j(N_0-1)\Omega_0} \\ 1 & e^{j2\Omega_0} & e^{j4\Omega_0} & \cdots & e^{j2(N_0-1)\Omega_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & e^{j(N_0-1)\Omega_0} & e^{j2(N_0-1)\Omega_0} & \cdots & e^{j(N_0-1)(N_0-1)\Omega_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(0\Omega_0) \\ F(1\Omega_0) \\ \cdots \\ F((N_0-1)\Omega_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \cdots \\ x[n] \end{bmatrix}$$

0　酉阵　　待求 N_0 个未知数

上述形如“$AX = b$”的N元一次复数方程组，当复数方阵A满秩时，存在唯一解。

实际上，复数方阵A（也称：幺正矩阵或酉矩阵）一定是满秩的，

离散周期信号 DFS 一定存在

也就是说任何的离散时间周期信号其傅里叶级数必定存在。☆

存在性（收敛性）问题

补充知识：酉矩阵

U^+：转置.共轭

对于维度为$n\times n$的复数方阵U，若满足：$UU^+=I_{n\times n}$，则称U为幺正矩阵，也称为酉矩阵。

其中，U^+表示U的转置共轭矩阵，$I_{n\times n}$表示维度为$n\times n$的单位矩阵。

离散傅里叶级数涉及的矩阵（DFT仍会涉及）就是典型的幺正矩阵（需要加个系数，进行归一化）。

$$U=\frac{1}{\sqrt{N_0}}A=\frac{1}{\sqrt{N_0}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & e^{j\Omega_0} & e^{j2\Omega_0} & \dots & e^{j(N_0-1)\Omega_0}\\ 1 & e^{j2\Omega_0} & e^{j4\Omega_0} & \dots & e^{j2(N_0-1)\Omega_0}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & e^{j(N_0-1)\Omega_0} & e^{j2(N_0-1)\Omega_0} & \dots & e^{j(N_0-1)(N_0-1)\Omega_0}\end{bmatrix}$$

序列长度

以$N_0=4$的幺正矩阵为例：

共轭.实部不变.虚部相反

$U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & j & -1 & -j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -j & -1 & j\end{bmatrix}$，矩阵$U$的转置$U^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & j & -1 & -j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -j & -1 & j\end{bmatrix}$，再对$U^T$取共轭（实部不变，虚部取反）得$U^+=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}$

幺正矩阵的逆矩阵就是其转置共轭矩阵，因为幺正矩阵的逆矩阵存在，所以幺正矩阵必定是满秩的。

存在性（收敛性）问题

例子：离散周期信号

以周期为4的离散时间周期信号$x[n]=[0$（n = 0时），1，-1，0] 为例：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & j & -1 & -j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -j & -1 & j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F(0\Omega_0)\\ F(1\Omega_0)\\ F(2\Omega_0)\\ F(3\Omega_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

求解上述方程，得到傅里叶级数的唯一解：$\boxed{X}=A^{-1}b=A^{+}b=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$

求解结果：$X=\left[0,\frac{1}{4}(-j+1),-\frac{1}{2},\frac{1}{4}(j+1)\right]^{T}$，与前文一致。直接得出了离散周期时间序列的Fourier级数

谢谢大家，欢迎大家评论区多提意见，交流探讨！