数字信号处理：
离散时间非周期信号的傅里叶变换

主讲人：杨国财
哈尔滨工业大学 机电学院机器人研究所
邮箱：gc_yang@outlook.com

目录

- 1.离散时间非周期信号的傅里叶变换
- 2.离散时间周期信号的傅里叶变换
- 3.离散时间傅里叶变换的性质
- 4.CTFS，CTFT，DTFS，DTFT的结果对比

回顾：离散时间周期信号的傅里叶级数

定义：对于离散时间周期信号$x[n]$，其周期为N_0（数字角频率为$\Omega_0=\frac{2\pi}{N_0}$），信号可表示成一系列离散时间单位圆上复指数信号的线性组合：

$|e^{jk\Omega_0 n}|^2=1$

模长=1

$X[k]=\sum_{n=0}^{N_0-1} W^{kn}x(n)$

对n求和：时域⇒频域

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N_0-1} F(k\Omega_0)\boxed{e^{jk\Omega_0 n}}$$

Fourier级数

其中，$F(k\Omega_0)=\frac{\langle x[n],e^{jk\Omega_0 n}\rangle}{\langle e^{jk\Omega_0 n},e^{jk\Omega_0 n}\rangle}=\frac{\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]e^{-jk\Omega_0 n}}{\sum_{n=0}^{N_0-1}1}=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]\,e^{-jk\Omega_0 n}$

注意：k的范围仅是一个周期，实际上，起点并不用是0，只要能涵盖一个周期即可，例如：$[3, N_0-4]$

问题：离散时间非周期信号该如何处理？

周期延拓

类比：连续时间傅里叶变换，将非周期信号看成周期为∞的周期信号。DFT

离散时间非周期信号的傅里叶变换（DTFT）

将离散时间非周期信号看成周期为∞的周期信号。

根据离散时间傅里叶级数，周期信号可以投影到N_0个不同频率的分量上：

$$F(k\Omega_0)=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]\,e^{-j\boxed{k\Omega_0}n}$$

$d\Omega$

当$N_0\to\infty$时，$\Omega_0=\frac{2\pi}{N_0}\to 0$，此时，$k\Omega_0$可以写成$\Omega$（频域变得连续）

然而，$F(k\Omega_0)\to 0$（没有意义）

对n求和：时域 → 频域

物理意义： 分解到覆盖整个频域的单位圆的复指数函数上

同样定义频谱密度：$F(\Omega)=N_0F(k\Omega_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\,e^{-j\Omega n}$ 离散时间非周期信号的傅里叶变换

注意：离散之后，同傅里叶级数，傅里叶变换的结果是周期的，周期为2π，

究其原因为$e^{j(\Omega+2\pi)n}=e^{j\Omega n}$

$x[n]$分解到 $e^{-j\Omega n}$ 但只涵盖$[0,2\pi)$ 但周期延拓

离散时间非周期信号的傅里叶变换（DTFT）

根据傅里叶级数，周期信号写成不同频率分量线性组合的形式：

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N_0-1}F(k\Omega_0)\,e^{jk\Omega_0 n}=\sum_{k=0}^{N_0-1}\frac{F(k\Omega_0)}{\Omega_0}\Omega_0 e^{jk\Omega_0 n}=\overset{2\pi\ \Delta}{\sum_{k=0}^{N_0-1}}\frac{\overset{F(\Omega)}{F(k\Omega_0)N_0}}{2\pi}e^{j\overset{\Omega}{k\Omega_0}n}\overset{d\Omega}{\Delta(k\Omega_0)}$$

当$N_0\to\infty$时，$\Omega_0\to 0$，此时，$k\Omega_0$可以写成Ω（离散的自变量变为连续），$\Delta(k\Omega_0)$可以写成$d\Omega$，累加运算变为积分，另外，对于$k\Omega_0$，因为$\Omega_0=\frac{2\pi}{N_0}$，当$k$ 由0至N_0-1 时，$k\Omega_0$ 是由0至2π。

所以，离散时间非周期信号可以写成：$\boxed{x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega}$ 离散时间非周期信号的傅里叶逆变换

注意！积分的上下限是$[0,2\pi]$，**因为频域上是周期延拓的，对一个周期内的频域线性组合即可。**

离散时间非周期信号的傅里叶变换（DTFT）

应用实例：离散时间周期方波信号的傅里叶级数

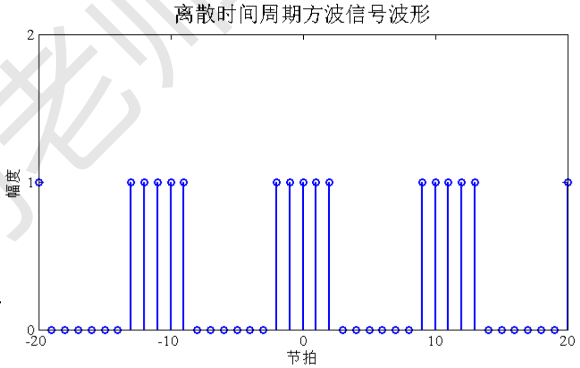
周期方波序列：$x[n]=\begin{cases}1,|n|\le N_1\\0,N_1<|n|\le\frac{N_0}{2}\end{cases}$

其对应的DTFS：$F(k\Omega_0)=\frac{1}{N_0}\sum_{k=-\frac{N_0}{2}}^{\frac{N_0}{2}}x[n]\,e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N_0}\sum_{k=-N_1}^{N_1}x[n]\,e^{-jk\Omega_0}$

当$k=0,\pm N_0,\pm 2N_0,\ldots$时，$N_0F(k\Omega_0)=2N_1+1$

当$k\ne 0,\pm N_0,\pm 2N_0,\ldots$时，$N_0F(k\Omega_0)=\frac{sin\left(2\pi\frac{k\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}{N_0}\right)}{sin\left(\pi\frac{k}{N_0}\right)}$

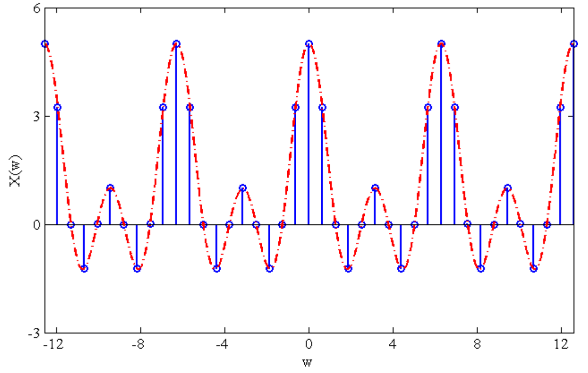
绘制$N_1=2$，N_0分别为10，20，40的频谱密度图像

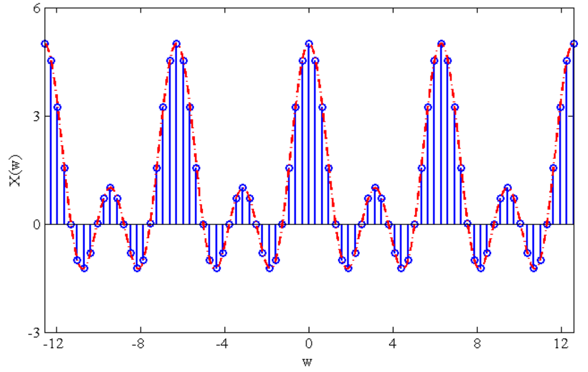


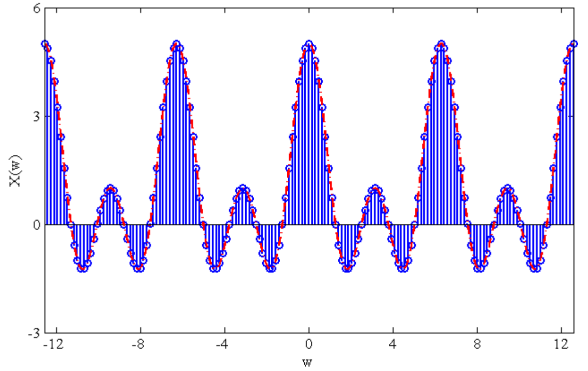
离散时间周期方波信号

当$N_0\rightarrow\infty$时，频谱密度函数连续。

$$F(\Omega)=\frac{sin[\Omega(N_1+{}^1/_2)]}{sin({}^{\Omega}/_2)}$$







离散时间非周期信号的傅里叶变换（DTFT）

总结：对于离散时间非周期信号$x[n]$，它的傅里叶变换为：

$$F(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\,e^{-j\Omega n}$$

注：上述式子并非对每一个信号均收敛，当信号的能量有限（$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2<\infty$）或者绝对可和（$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|<\infty$）时，才存在傅里叶变换；

相应地，其傅里叶逆变换就是将频域的信息进行线性组合，重新得到时域信号：

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}F(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

注：上式因为积分区间是有限的，只要$F(\Omega)$存在，$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}F(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$与原信号$x[n]$完全一致，不存在任何差别，也不会存在连续时间信号在间断点处的Gibbs现象。

离散时间非周期信号的傅里叶变换（DTFT）

DTFT的本质：能量有限或绝对可和的离散时间非周期信号可以分解到覆盖范围为$[0,2\pi]$的连续频域的单位圆上复指数序列上。

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\left[c_0e^{j0n}+c_1e^{j0.0001n}+\cdots+c_1e^{j\pi n}+\cdots+c_1e^{j2\pi n}\right],\quad x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}F(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

因为$e^{j\Omega n}$是周期的，周期为2π，也就是$e^{j\Omega n}=e^{j(\Omega\pm2\pi)n}$，所以也可以写成：

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\left[c_0e^{j2\pi n}+c_1e^{j(2\pi+0.0001)n}+\cdots+c_1e^{j3\pi n}+\cdots+c_1e^{j4\pi n}\right],\quad x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{4\pi}F(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

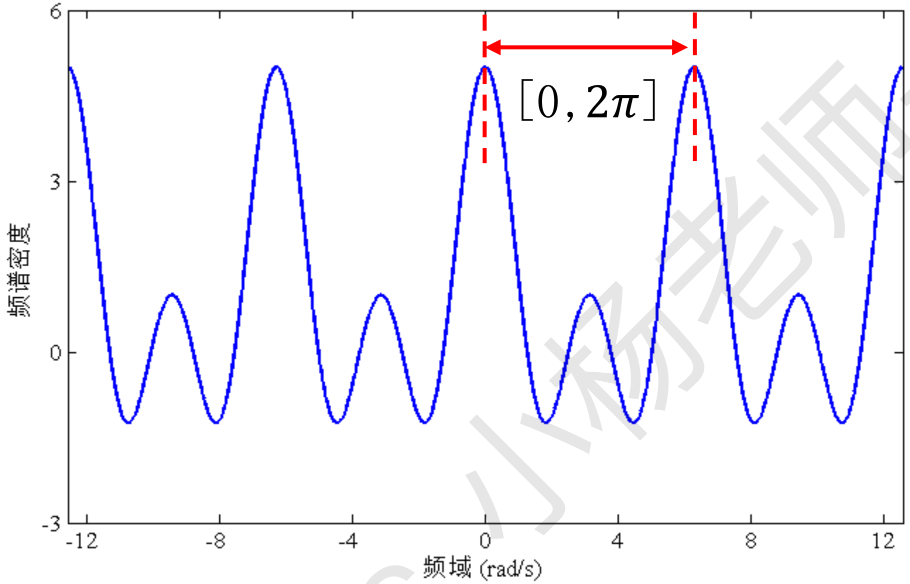
因此，频谱密度图像是以2π为周期，对$[0,2\pi]$的图像不断延拓的。

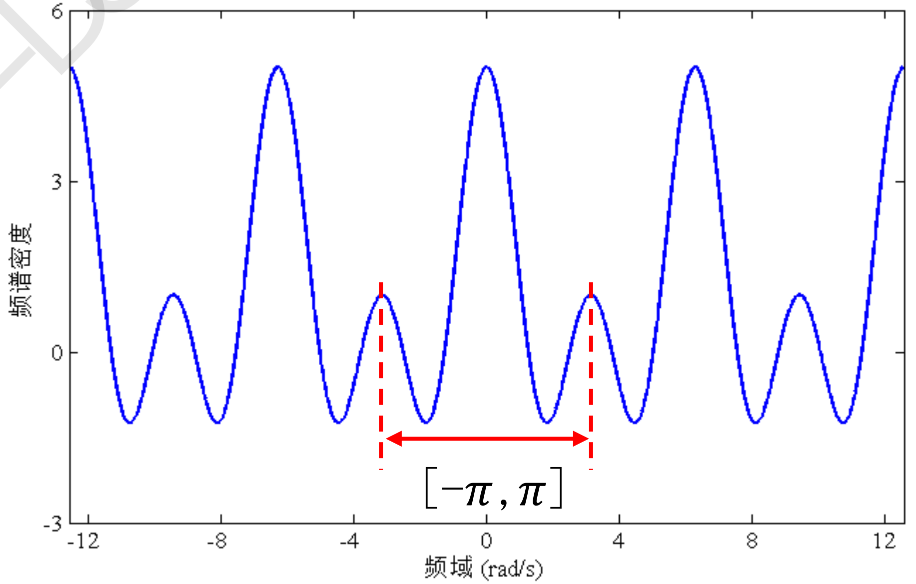
另一方面，对于$[\pi,2\pi]$的图像，根据周期为2π，可以写成$[-\pi,0]$，综合$[0,\pi]$的结果，也可以认为离散时间非周期信号可以分解到覆盖范围为$[-\pi,\pi]$的连续频域的单位圆上复指数序列上。

离散时间非周期信号的傅里叶变换（DTFT）

离散时间矩形信号频谱密度：

- $[0,2\pi]$为基本周期延拓；
- 也可$[-\pi,\pi]$为基本周期延拓；
- 0，2π附近为低频分量；
- $-\pi$，π附近为高频分量。

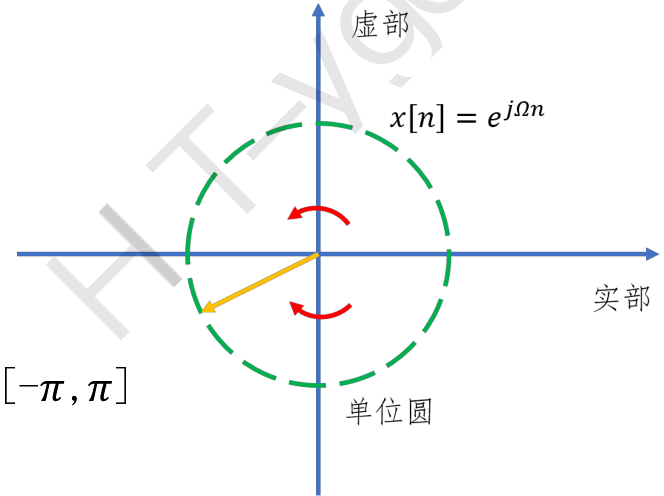


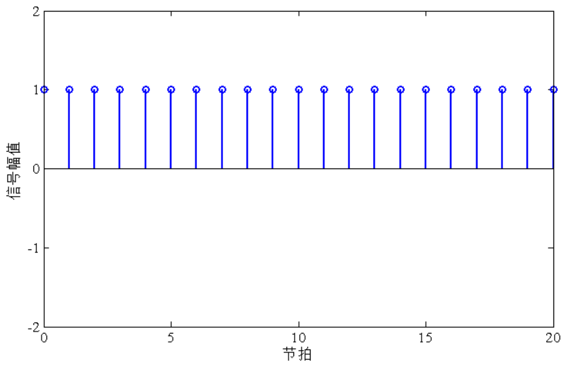


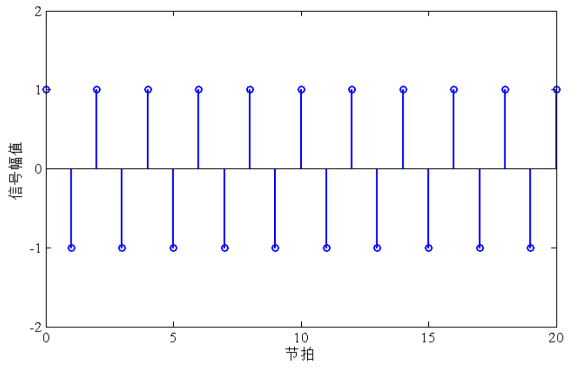
以$\Omega=\frac{10}{9}\pi$为例，

$e^{j\frac{10}{9}\pi n}=e^{j\frac{28}{9}\pi n}$，周期为$2\pi$

$e^{j\frac{10}{9}\pi n}=e^{-j\frac{8}{9}\pi n}$，$[\pi,2\pi]$可转换至$[-\pi,\pi]$





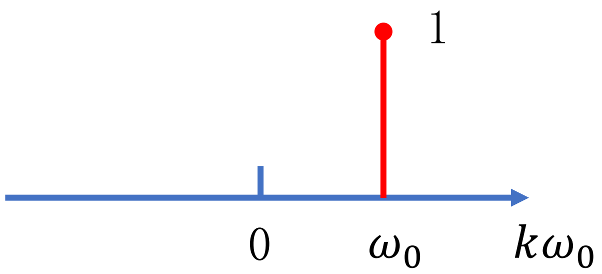


离散时间周期信号的傅里叶变换

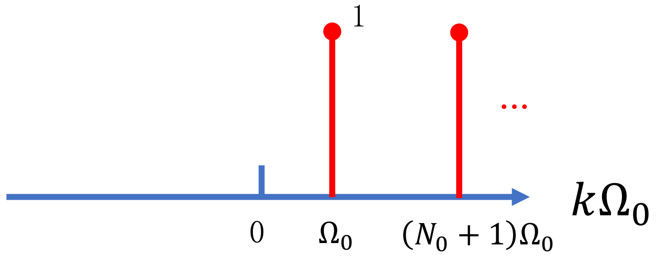
离散时间周期信号$e^{j\Omega_0 n}$的傅里叶变换

对于连续时间的周期信号$e^{j\omega_0 t}$，其存在傅里叶变换，并且基于该傅里叶变换，我们将连续时间周期信号的傅里叶级数统一到了傅里叶变换中。

对于离散时间周期信号$e^{j\Omega_0 n} = e^{j\frac{2\pi}{N_0}n}$，其傅里叶变换又是如何？　　—— 以$2\pi$为周期的冲激序列

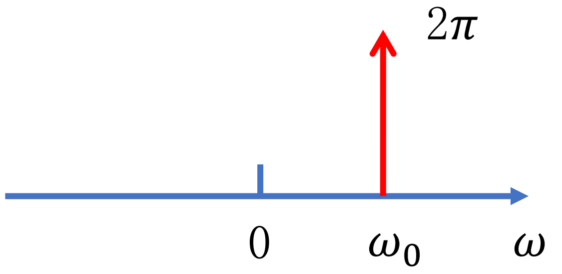


连续时间傅里叶级数，
频谱

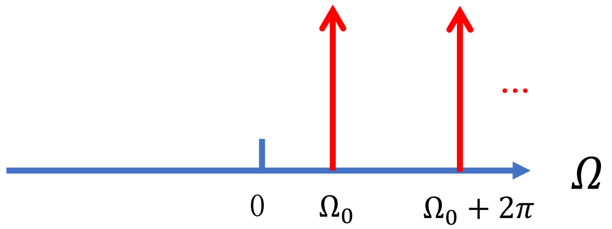


离散时间傅里叶级数，
频谱

$$e^{j\frac{2\pi}{N_0}n} = e^{j\frac{2\pi}{N_0}n} e^{j\frac{2\pi}{N_0}N_0 n} = e^{j\frac{2\pi}{N_0}(N_0+1)n}$$



连续时间傅里叶变换，
频谱密度



离散时间傅里叶变换，
频谱密度

离散时间周期信号的傅里叶变换

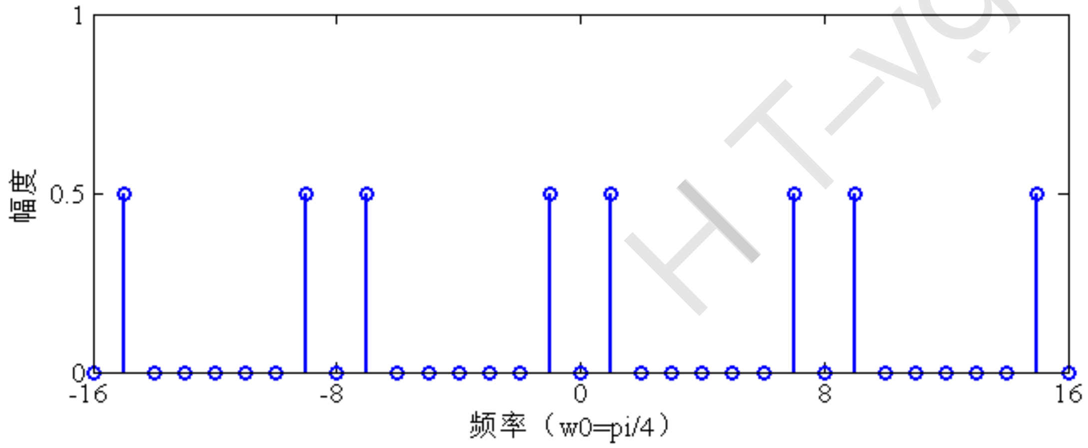
实例：求解离散时间周期信号$x[n]=cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$的傅里叶变换得到的频谱密度图像。

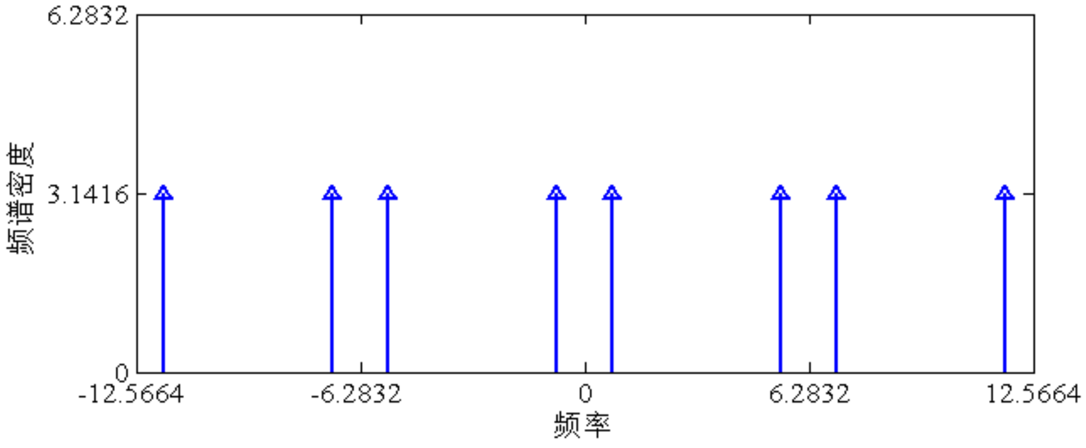
解：先求解$x[n]$的傅里叶级数，利用欧拉公式，直接写出余弦信号的复指数形式，有：

$$x[n]=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}n}=\frac{1}{2}e^{j\frac{7\pi}{4}n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}n}$$

数字角频率$\Omega_0=\frac{\pi}{4}$，周期为$N_0={}^{2\pi}/_{\Omega_0}=8$，频谱图在[0，7]区间上1和7处存在谱线，幅度为$\frac{1}{2}$，并以此为基本周期不断延拓，周期为8；

考虑$e^{j\frac{\pi}{4}n}$和$e^{j\frac{7\pi}{4}n}$的傅里叶变换，频谱密度图为在$[0,2\pi]$区间上$\frac{\pi}{4}$和$\frac{7\pi}{4}$上存在冲激，强度为2π，并以此为基本周期不断延拓，周期为2π。





离散时间傅里叶变换的性质

性质1：周期性

$$X(\Omega)=X(\Omega+2\pi)$$

Z变换的共轭与共轭对称性

若：$x[n]\overset{Z}{\leftrightarrow}X(z)$，则：$x^*[n]\overset{Z}{\leftrightarrow}X^*(z^*)$

为什么不是$X^*(-z)$?

傅里叶变换的基本算子：$e^{j\Omega}$，将信号分解成单位圆上复指数信号的线性组合；

Z变换的基本算子：$z=|A|e^{j\Omega}$，将信号分解成一般形式复指数信号的线性组合；

$\left(e^{j\Omega}\right)^*=e^{-j\Omega}$ $z^*=|A|e^{-j\Omega}\neq -z$

性质2：共轭与共轭对称性

若：$x[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(\Omega)$，则：$x^*[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X^*(-\Omega)$ $x^*[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X^*(\Omega^*)$

同“CT-FT”，该性质的重要推论为：离散时间信号的频谱密度图像，**幅度图像是偶对称的，相位图像是奇对称的。**

离散时间傅里叶变换的性质

性质3：线性性质

若：$x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(\Omega)$，$x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(\Omega)$，

则：$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$

性质4：卷积性质

若：$x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(\Omega)$，$x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(\Omega)$，

则：$x[n] = x_1[n] * x_2[n]$，$X(\Omega) = X_1(\Omega)X_2(\Omega)$

FS，FT，DTFS，DTFT的结果对比

傅里叶分析实现了信号在时域和频域之间的相互转换。

傅里叶变换：　时域→频域，将信号分解成一系列单位圆上复指数信号，分解得到的系数是复数；

傅里叶逆变换：频域→时域，将一系列复指数信号重新组合为原信号。

注意点：

（1）并非所有信号均存在这种分解，只有能量有限或者绝对可积（可和）的信号，存在上述分解与合成（例外：离散时间周期信号外一定存在上述合成与分解）；

（2）对于周期信号，信号是分解到离散的频率上（一系列成谐波关系的频率），基准是周期信号的基波频率，这种分解对应的图像是频谱图像；

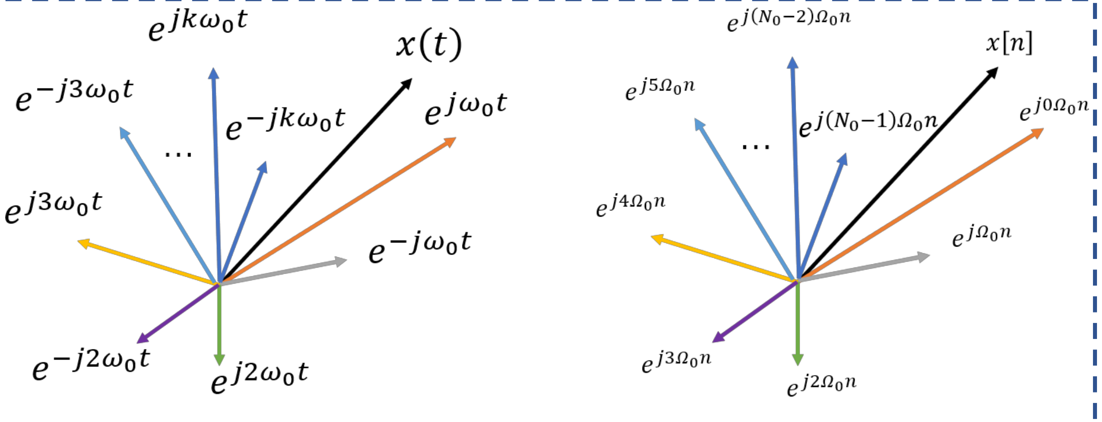
而非周期信号，信号是分解到无穷多个频率上，在每个频率上的强度其实是无穷小，因此，引入频谱密度的概念，可以想象成信号是由无穷多个“幅度无穷小”的复指数信号组成。

（3）基于$e^{j\omega_0 t}$和$e^{j\Omega_0 n}$的傅里叶变换，可将周期信号的傅里叶级数统一到傅里叶变换上中，其物理含义由某一特定频率的复指数信号转换为连续频域上特定频率点上的脉冲；

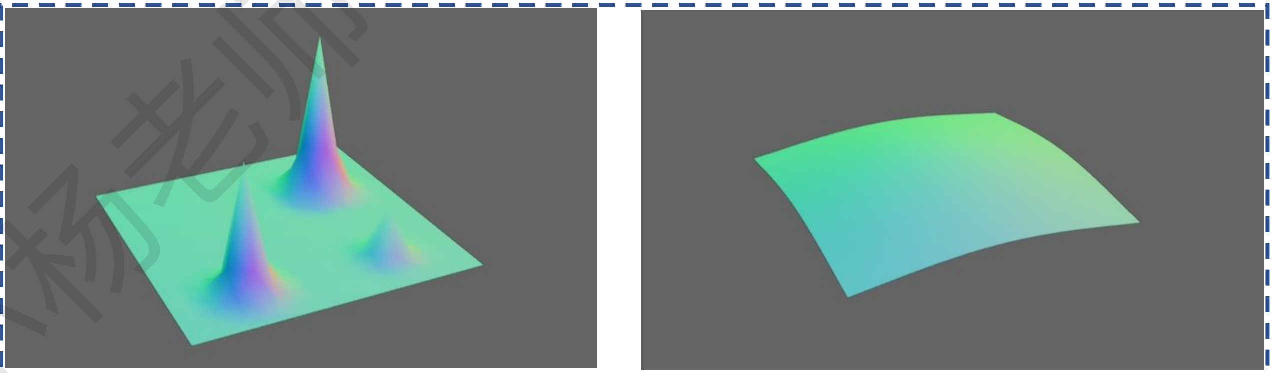
（4）信号由连续变为离散之后，频域的图像将会**周期延拓**。（现阶段，先从$e^{jk\Omega_0 n}$ 和$e^{j\Omega n}$ 的周期性理解，后续将从采样角度解释）

FS，FT，DTFS，DTFT的结果对比

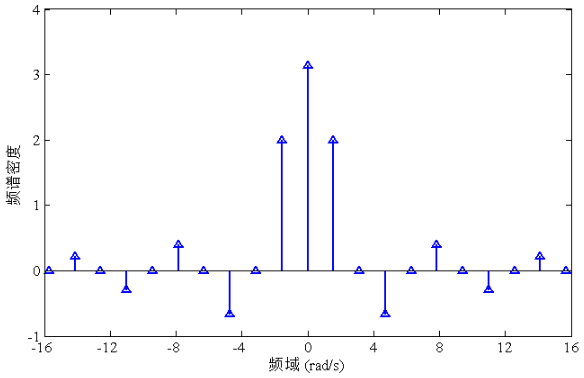
从图像化角度理解：



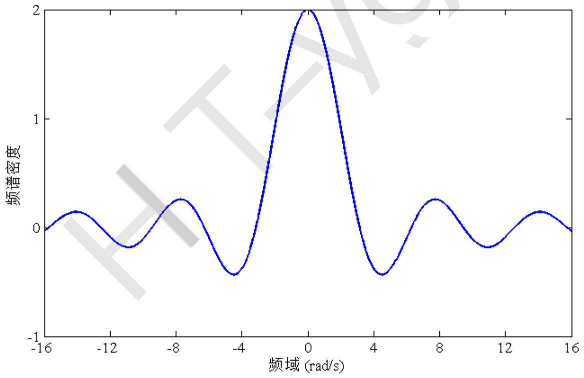
傅里叶级数的图像化解释：信号的合成与分解



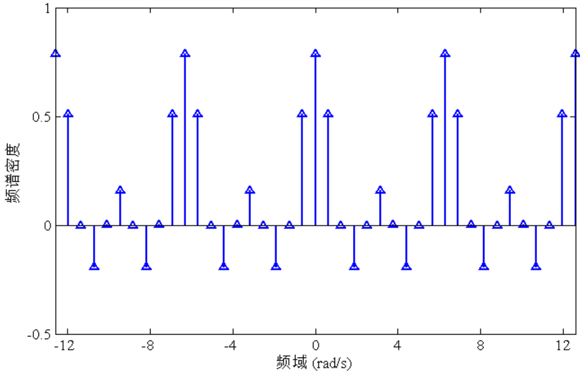
周期趋于∞，分解出的复指数分量不再分布在特定的频率上，而是覆盖整个频域，但频域上的每个点的强度均无穷小



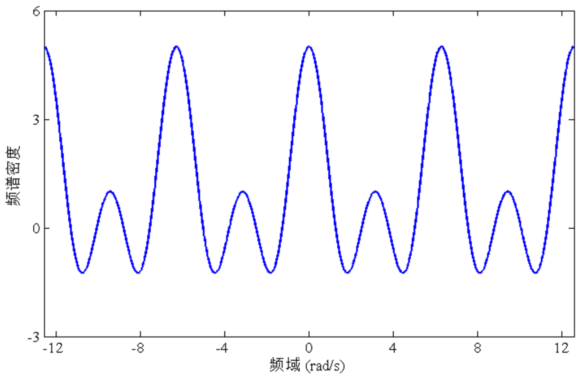
CT-FS：离散，非周期



CT-FT：连续，非周期



DT-FS：离散，周期



DT-FT：连续，周期

FS，FT，DTFS，DTFT的结果对比

问题：工程实际中，我们通过传感器可以采集到各种各样的信号，如：机器人系统中关节位置传感器采集到的位置信号，卫星中的惯性传感器采集到的角速度和加速度信号，温度控制系统中温度传感器采集到的温度信号。借助计算机可以对这些信号开展傅里叶分析，观察数据在频域上的分布，也可以获得数据中叠加的噪声所在频率，方便我们后续设计计滤波器，对信号进行滤波，得到更准确的信号。

那么，计算机对传感器的信号是如何进行分析的？

FS？FT？DTFS？还是DTFT？ 不能省略！ 记号错了。

传感器的信号是数字信号，所以无法进行连续时间的傅里叶变换；

离散时间傅里叶变换针对长度为无穷长的信号，其得到的频谱是连续的，与实际信号的情况也不一致；

DTFS

离散时间傅里叶级数针对离散的信号，频谱的结果也是离散的，最有可能由计算机实现，但其针对周期信号。

[illegible]!!!

实际上，计算机采用“离散傅里叶变换（DFT）”对信号开展分析。 那我之前理解又错了。

——基本原理：**将采集到的信号（信号长度为N_0）看成周期为N_0的离散时间周期信号，并计算其DTFS。**

计算机做的是 离散时间周期信号的 DFT ⟺ DTFS

级数

04 离散时间傅立叶变换

FS

FT

DTFS ⟺ DFT

DTFT

谢谢大家，欢迎大家评论区多提意见，交流探讨！